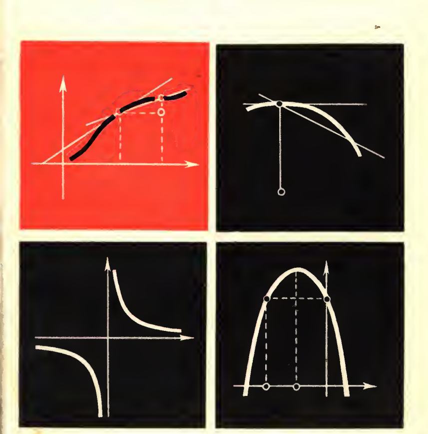
НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

О. С. ИВАШЕВ-МУСАТОВ



О. С. ИВАШЕВ-МУСАТОВ

НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ, ИСПРАВЛЕННОЕ

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1973

517.2
И 24
УДК 517.0

И $\frac{0223-1709}{042(02)\text{-}73}$ 10-73

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Эта книга возникла из лекций, читавшихся на вечернем отделении геологического факультета МГУ (на весь курс высшей математики, включая лекции и упражнения, отводилось около ста часов). Я не стремился в изложении к излишней общности, чтобы за ней не пропала суть дела. Так, для начала, читатель может предположить, что функции определены всюду или всюду, за исключением одной точки. В книге нет многих терминов. Мне кажется, что при первом знакомстве обилие разных терминов только тормозит восприятие. Ряд более тонких вопросов разобран в приложении — при первом знакомстве они могут быть опущены.

Все изложение строится на основе понятия функции, а не переменной величины. Термин «переменная величина» употребляется только для пояснений, как интуитивно всем понятный. Для построения теории удобнее иметь дело с более простым понятием функции, чем с понятием переменной величины, аккуратное определение которой довольно сложно.

Основная особенность книги заключается в том, что читатель сначала знакомится с понятием непрерывности, а уже потом с понятием предела. Чем вызвана такая особенность?

Преподавателям хорошо известно, какие трудности возникают у студентов при изучении теории пределов. И это естественно, так как с понятием предела в повседневном обиходе встречаться не приходится. Понятие это очень глубокое и возникло в результате многостепенного абстрагирования от окружающей действительности. Примеры же, которыми поясняется теория пределов, сводятся или к непрерывным функциям, что не так показательно, или к устранимым точкам разрыва, что вначале воспринимается с трудом.

А между тем есть более простое понятие, с которым мы встречаемся на каждом шагу, — непрерывность. Попросите, например, кого угодно: «вычислите поточнее объем некоторого куба». И каждый, получивший такое задание, будет стремиться поточнее измерить ребро куба x, так как он уверен, что чем меньшую ошибку он допустит при измерении x, тем меньшая ошибка получится при вычислении объема куба, равного x^3. Здесь содержится совершенно отчетливое интуитивное представление о непрерывности функции $y = x^3$. И подобное столкновение с непрерывностью происходит на каждом шагу. Поэтому мне кажется, что начинать изучение математического анализа надо с более простого и хорошо знакомого из практики понятия непрерывности. Следует только его оформить, превратив из расплывчатого интуитивного представления в строго логическое понятие.

Остальной материал в основном излагается традиционно.

Автор благодарен Н. Х. Розову, любезно прочитавшему всю рукопись и сделавшему ряд полезных замечаний.

В заключение мне хотелось бы выразить благодарность редактору книги Г. В. Дорофееву, большая работа которого над рукописью значительно улучшила все изложение.

Август 1968 г. *О. С. Ивашев-Мусатов*

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Во втором издании исправлены замеченные недостатки, изменены доказательства некоторых теорем и добавлено пояснение понятия непрерывности функции с точки зрения приближенных вычислений.

Август 1972 г. *О. С. Ивашев-Мусатов*

ГЛАВА I

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Понятие функции

Даже при поверхностном взгляде видно, что все вокруг нас находится в постоянном изменении. Меняются температура, влажность воздуха, атмосферное давление, сила ветра, скорость движения машины и тому подобное. Меняется—это значит, что при измерениях одной и той же величины в разное время и в разных местах будут получаться разные числа.

Постоянные (неменяющиеся) величины встречаются чрезвычайно редко. Примером постоянной может служить отношение длины окружности к ее диаметру: какую окружность ни взять, это отношение равно π. Другой пример — сумма углов в треугольнике: какой треугольник ни взять, сумма его углов равна двум прямым. Еще пример—произведение давления газа в цилиндре с поршнем на объем газа: оно тоже не меняется, но здесь уже нужна оговорка—температура при этом должна сохраняться постоянной.

Математический анализ изучает переменные величины. Переменные величины можно разделить на две группы: одни изменяются произвольно—их называют независимыми переменными, а изменение вторых зависит от изменения первых—их называют зависимыми переменными, или функциями. Например, радиус R окружности и ее длина C — это переменные величины, они могут принимать различные значения; однако, выбрав R произвольным образом, для C получаем уже вполне определенное значение, $C = 2\pi R$, т. е. R меняется независимо—это независимая переменная, а C изменяется в зависимости от R—это зависимая переменная; при этом говорят, что C есть функция от R, а

R есть аргумент этой функции. Записывают это следующим образом: $C=f(R)$ или $C=C(R)$ и т. п.

Аналогично площадь круга S есть функция (но уже иная, нежели $C(R)$) от его радиуса R (аргумента этой функции): $S=g(R)$ или $S=S(R)$ и т. п. (и то, что это — иная функция, нежели $C(R)$, отмечено в записи — эта функция обозначается при помощи другой буквы). Также и давление p в цилиндре с поршнем есть функция от объема V, занимаемого газом (V — аргумент этой функции): $p=F(V)$ или $p=p(V)$ и т. п.

Основное, на что надо обратить внимание во всех этих примерах, состоит в том, что каждому значению аргумента соответствует (по некоторому закону) определенное значение функции. При этом несущественно, знаем мы формулу, описывающую эту зависимость, или нет. Например, давление воздуха в комнате меняется со временем, т. е. давление p есть функция от времени t: $p=p(t)$. Однако вряд ли кто-нибудь сумел бы написать формулу, выражающую эту зависимость.

Итак, мы подошли к определению понятия функции — основного понятия не только математического анализа, но и всей математики:

Определение 1. Если каждому числу x из множества чисел M поставлено в соответствие единственное число y, то говорят, что на множестве M задана функция

$$y=f(x). \tag{1}$$

При этом y называют *функцией* от x, x — *аргументом* этой *функции*, а множество M — *областью определения* этой *функции*. Наряду с обозначением (1) приняты и другие обозначения, например:

$$y=y(x),\quad y=\alpha(x) \text{ и т. п.}$$

При этом обозначения выбираются так, чтобы в данном рассуждении разные функции обозначались по-разному, а одна и та же функция обозначалась одним и тем же способом.

В приведенных выше примерах с длиной окружности $C(R)$ и площадью круга $S(R)$ областью определения этих функций будет множество M всех положительных действительных чисел. В примере с давлением газа в цилиндре с поршнем аргумент V не может быть отрицательным,

нулем и больше объема V_0 цилиндра, т. е. областью определения этой функции будет множество M всех действительных чисел V, удовлетворяющих неравенствам $0 < V \leqslant V_0$.

Выше мы рассматривали переменную y как функцию от одной переменной x. На практике часто переменная y зависит от нескольких переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Тогда y называют функцией от n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (независимых переменных, аргументов этой функции) и записывают это так:

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad y = y(x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ и т. п.}$$

Первое знакомство с анализом начинается с изучения более простых функций от одного аргумента.

Изучение функции начинается с ее области определения. Эти множества могут быть устроены весьма сложно. Из них принято выделять простейшие множества:

Рис. 1.

Определение 2. *Отрезок* $[a;\ b]$ есть множество всех действительных чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a \leqslant x \leqslant b$. Числа a и b называют *концами отрезка* (соответственно левым и правым). Все действительные числа x, удовлетворяющие неравенствам $a < x < b$, называются *внутренними точками* отрезка $[a;\ b]$ и их множество называется *интервалом* $(a;\ b)$.

Поясним, откуда происходит название отрезок. Припомним, что каждое действительное число изображается точкой на числовой оси и каждая точка числовой оси изображает некоторое действительное число, так что в дальнейшем мы не будем различать действительные числа и точки на числовой оси (говоря «число», представляем себе соответствующую точку и, говоря «точка», представляем себе соответствующее число).

Возьмем два числа a и b — это точки на прямой. Отрезок (как его принято понимать в геометрии) с концами a и b (рис. 1) состоит из точек прямой, расположенных между точками a и b (концами этого отрезка) и самих точек a и b. Если точка (число) x лежит на отрезке, то она или расположена между точками a и b, и тогда

$a < x < b$, или совпадает с концом a, и тогда $x = a$, или совпадает с концом b, и тогда $x = b$.

Поговорим теперь о функциях. В определении функции ничего не сказано о том, как устанавливается соответствие между числами x и y. В зависимости от того, как задано это соответствие, различают три основных способа задания функции: табличный, аналитический (при помощи формул) и графический (при помощи чертежа). Разберем эти способы, их достоинства и недостатки.

Табличный способ задания функции состоит в том, что для каждого значения аргумента x рядом выписывается соответствующее значение функции y — получается таблица. Например:

x	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7
y	2,78	2,96	3,31	3,85	4,63

Из приведенной таблицы легко себе представить, как ведет себя функция. Пусть, например, x — это время, а y — это температура. Ясно, что температура со временем повышается, причем чем дальше, тем быстрее, и в определенные моменты времени известны точные значения температуры. Это — достоинства табличного способа. Но вот совершенно неизвестно, определена ли эта функция при $x = 1,37$? А если определена, то чему равен y при $x = 1,37$? Таким образом, при табличном способе задания функции почти ничего не известно об области определения этой функции. Для ответа на этот вопрос надо знать что-то помимо этой таблицы.

Допустим теперь, что мы знаем из каких-либо соображений, что функция определена для всех промежуточных значений x. Но как она там изменяется? Скажем, в приведенном примере, как будет изменяться y при x, меняющемся от 1,3 до 1,4, какая здесь будет таблица? Такая:

x	1,30	1,32	1,34	1,36	1,38	1,40
y	2,78	2,81	2,84	2,88	2,92	2,96

или такая:

x	1,30	1,32	1,34	1,36	1,38	1,40
y	2,78	2,95	3,17	2,62	2,74	2,96

?

В первом случае ясно, что нагревание идет постепенно, «нормально». А во втором случае с прибором творится что-то странное, явно «что-то не то». Но по первоначальной таблице, ничего не зная о том, откуда эта таблица взялась, выбрать из этих двух возможностей одну, соответствующую действительности, невозможно: оба случая равноправны. В этом—большой недостаток табличного задания функции.

Однако до недавнего времени это был единственный способ экспериментального изучения окружающих нас закономерностей. В самом деле, что делается, когда ставят опыт? С точки зрения математика здесь изучается зависимость между определенными переменными, другими словами, изучается некоторая функция. При опыте ведутся записи, в простейшем случае отмечается время (аргумент функции) и записывается показание прибора (соответствующее значение функции), т. е. функция задается таблицей. А задача исследователя состоит в том, чтобы по полученной таблице изучить эту функцию.

Аналитический способ задания функций состоит в том, что соответствие между x и y задается при помощи формулы. Например,

$$y=\frac{\sin 2x}{x^2+\lg(x+6)}, \qquad y=\begin{cases} x^2+2 & \text{при } x>-3, \\ \sin x-1 & \text{при } x<-4. \end{cases}$$

Обратите внимание на то, что второе соотношение каждому числу x (из множества $x<-4$, $x>-3$) ставит в соответствие единственное число y. Поэтому второе соотношение тоже задает y как функцию от x, и область определения данной функции состоит из чисел x, удовлетворяющих неравенствам $x<-4$ и $x>-3$. Подчеркнем особо, что здесь две формулы задают одну функцию (каждая для своих x), но, как мы видим, для задания функции это несущественно.

При аналитическом способе задания функции и область определения ясна (по крайней мере теоретически), и точные значения можно вычислить, и работать с такой функцией несложно. Это—достоинства аналитического способа задания.

Но как ведет себя функция, заданная той или иной формулой? Если y—это температура, то при x, изменяю-

щемся от 1,3 до 1,4, она повышается или понижается? А может она то повышается, то понижается? Если формула сложна, то ответы на эти вопросы получить нелегко (хотя теоретически они будут решены ниже полностью и трудности будут возникать только из-за решения получающихся уравнений). Недостаток аналитического способа задания функции — его малая наглядность.

Отметим, что две функции естественно считать равными только в том случае, когда их области определения совпадают и при равных аргументах они имеют равные значения. Так, функции $\lg x^2$ и $2\lg x$ не равны, так как первая определена для всех $x \neq 0$, а вторая — только для $x > 0$. Эти функции равны только на множестве $x > 0$. Аналогично функции

$$f(x) = x + 1 \text{ и } g(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$$

не равны, так как $f(x)$ определена для всех x, а $g(x)$ для $x = 1$ не определена (хотя при любом $x \neq 1$ эти функции принимают равные значения).

Прежде чем перейти к графическому способу задания функции, введем важное понятие графика функции:

Определение 3. *Графиком функции* $y = f(x)$ называется множество точек на плоскости с координатами

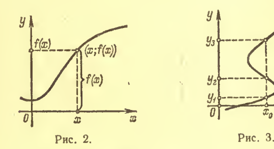


Рис. 2. Рис. 3.

$(x;\ f(x))$, где x — любое число из области определения этой функции.

График обычно представляет собой линию (рис. 2), состоящую из одного или нескольких кусков. Например, графиком функции $y = kx + b$ служит прямая (линия состоит из одного куска), а графиком функции $y = 1/x$ служит гипербола (линия состоит из двух кусков). Описательно

можно сказать, что график функции $y=f(x)$ есть такая линия, координаты любой точки которой связаны соотношением $y=f(x)$.

Итак, с каждой функцией связана некоторая линия — график этой функции. Сказать «и обратно» было бы неверно — из рис. 3 видно, что с начерченной линией никакая функция не связана, так как точке x_0 тогда соответствовали бы три числа y_1, y_2 и y_3, что противоречит определению функции. Однако любая линия, пересекающаяся с каждой из прямых, параллельных оси ординат, не более чем в одной точке, задает некоторую функцию.

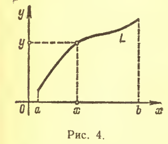


Рис. 4.

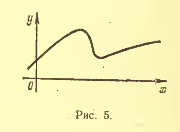


Рис. 5.

В самом деле, рассмотрим на рис. 4 отрезок $[a; b]$, полученный при проектировании линии L параллельно оси Oy на ось Ox. Возьмем любую точку x из отрезка $[a; b]$ и проведем через нее прямую, параллельную оси Oy. Эта прямая пересекает линию L в единственной точке. Ординату y точки пересечения поставим в соответствие взятому x. Следовательно, при помощи линии L каждому x из множества M (в нашем случае M есть отрезок $[a; b]$) ставится в соответствие единственное число y, т. е. на M задана функция $y=f(x)$, а взятая линия есть график этой функции.

Задать функцию графически — значит нарисовать ее график. Это делают все самопишущие приборы — они вычерчивают графики изучаемых функций. В дальнейшем мы не будем различать функции и их графики: говоря «функция», тут же будем представлять себе ее график, а рисуя график, тут же будем говорить «функция» (подобно тому как мы не различаем точки на прямой и действительные числа).

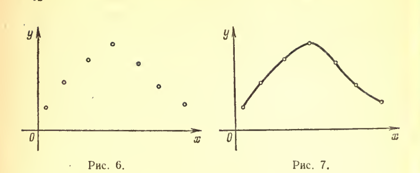


Рис. 6.

Рис. 7.

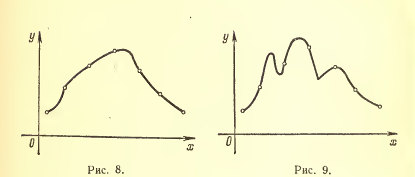


Рис. 8.

Рис. 9.

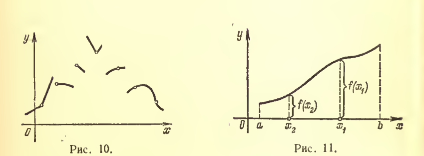


Рис. 10.

Рис. 11.

Пусть график (рис. 5) задает изменение температуры y в зависимости от времени x. Хорошо видно, что температура сначала росла, потом стала убывать, потом опять росла (но медленнее, чем в начале), т. е. графическое задание функции чрезвычайно наглядно. Но вот в своей точности оно проигрывает. Из чертежа можно получить любое значение функции (см. рис. 2), измерив ординату соответствующей точки графика. Это измерение можно сделать, однако, только с некоторой ошибкой, зависящей от чертежа и измерительных приборов, — это недостаток способа.

Удобнее всего изучать функцию, заданную и аналитически, и графически. При переходе от аналитического способа задания функции к графическому (при этом говорят, что по заданной формуле строится график) в простейшем случае составляют таблицу

x	x_1	x_2	x_3	...
$y=f(x)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	...

наносят на плоскости точки с координатами $(x_1;\ f(x_1))$, $(x_2;\ f(x_2))$ и т. д. и «соединяют их плавной линией». При этом характерные особенности поведения функции могут исказиться или совсем утеряться.

Например, по точкам рис. 6 графики можно провести по-разному (рис. 7—10), и какой из них будет верным — неизвестно. Ниже будут даны приемы, позволяющие уловить основные особенности поведения функции (по крайней мере теоретически).

Рис. 12.

Итак, определим основные особенности поведения функции.

Определение 4. Функция $y=f(x)$ (рис. 11) *монотонно возрастает* на интервале $(a;\ b)$, если

$$f(x_1) > f(x_2) \text{ для любых } x_1 \text{ и } x_2 \ (x_1 > x_2) \text{ из } (a;\ b).$$

Функция $y=f(x)$ (рис. 12) *монотонно убывает* на интервале $(a;\ b)$, если

$$f(x_1) < f(x_2) \text{ для любых } x_1 \text{ и } x_2 \ (x_1 > x_2) \text{ из } (a;\ b).$$

Эти функции называются *монотонными* на интервале $(a; b)$. Про монотонно возрастающую функцию описательно можно сказать так: чем больше значение аргумента x, тем больше значение функции $f(x)$, или иначе, с ростом x растет $f(x)$ (рис. 11).

Определение 5. Если для точки x_0 можно найти такой интервал $(a; b)$, $a < x_0 < b$, что:

1) $f(x_0) > f(x)$ для любого $x \neq x_0$ из $(a; b)$, то точка x_0 называется *точкой максимума* (max) функции $y = f(x)$ (рис. 13);

2) $f(x_0) < f(x)$ для любого $x \neq x_0$ из $(a; b)$, то точка x_0 называется *точкой минимума* (min) функции $y = f(x)$ (рис. 14).

Точки максимума и минимума называются *точками экстремума*.

Про точку максимума описательно можно сказать так: в этой точке функция имеет наибольшее значение из всех близких (но не обязательно всех вообще). На рис. 13 видно, что справа от точки b имеются значения функции

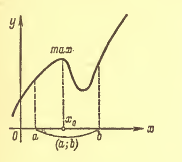


Рис. 13.

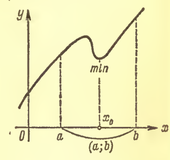


Рис. 14.

бóльшие, чем $f(x_0)$, но если рассматривать только близкие значения функции (для аргументов, расположенных около точки x_0, т. е. попавших в интервал $(a; b)$), то $f(x_0)$ будет наибольшим.

Введем еще несколько терминов. Пусть задана пара функций (определенных всюду)

$$\begin{cases} y = f(t), \\ t = g(x). \end{cases}$$

Эти равенства задают y как функцию от x: $y=F(x)$. Действительно, возьмем любое число x; ему поставлено в соответствие единственное число $t=g(x)$, а этому числу t поставлено в соответствие единственное число $y=f(t)$. Таким образом, взятому числу x поставлено в соответствие единственное число y. Функция $y=F(x)$ называется *сложной функцией*, составленной из функций $f(t)$ и $g(x)$ при промежуточной переменной t, и обозначается $f(g(x))$. Например, пара функций

$$\begin{cases} y=t^2, \\ t=\sin x \end{cases}$$

задает сложную функцию

$$y=(\sin x)^2=\sin^2 x.$$

В приведенном выше рассуждении предполагалось, что функции $f(t)$ и $g(x)$ определены всюду (чтобы не усложнять формулировку). Если же эти функции определены не всюду, то надо рассматривать только допустимые значения t и x. Выясним, например, для каких x пара функций

$$\begin{cases} y=\sqrt{t+\pi}, \\ t=6\arcsin x \end{cases}$$

задает сложную функцию

$$y=\sqrt{6\arcsin x+\pi}.$$

Прежде всего, $-1\leqslant x\leqslant 1$, иначе $\arcsin x$ не имеет смысла. Но, кроме того, функция $y=\sqrt{t+\pi}$ определена для $t\geqslant-\pi$; поэтому годятся не все x из отрезка $[-1;\ 1]$, а только такие, для которых $6\arcsin x\geqslant-\pi$, т. е. x из отрезка $[-1/2;\ 1]$; этот отрезок и будет областью определения этой сложной функции.

Функция g называется *обратной* к функции f, если для любого x из области значений функции f выполняется равенство $f(g(x))=x$. Например, функция $g=x^3$ обратна к функции $f=\sqrt[3]{x}$, так как $f(g(x))=\sqrt[3]{x^3}=x$ для любого x. Аналогично функция $g=\arcsin x$ обратна к функции $f=\sin x$, так как $f(g(x))=\sin(\arcsin x)=x$ для любого x из отрезка $[-1;\ +1]$.

§ 2. Непрерывность функции

Наблюдая происходящие вокруг изменения, прежде всего можно отметить, что они происходят (в основном) постепенно, непрерывно. Например, поставили кипятить воду, время идет, температура воды повышается, но как?— постепенно, без скачков, непрерывно, т. е. за малый промежуток времени температура изменяется мало. В этом примере, с точки зрения математика, температура воды есть функция времени, и эта функция такова, что при малом изменении аргумента (времени) мало меняется функция (температура).

Но что значит мало? Вот 1 *мм* — это много или мало? Если ошибка в 1 *мм* сделана при изготовлении стола, то это мало. Но если эта же ошибка в 1 *мм* сделана при изготовлении шарикоподшипника диаметром в 1 *см*, то это очень много. Таким образом, ответ на вопрос о том, будет ли взятая величина малой, зависит от обстоятельств. Все эти соображения должны быть учтены при определении непрерывности функции, и, кроме того, это определение должно быть таково, чтобы с его помощью можно было вычислять (поскольку мы занимаемся математикой)[1].

Определение 6. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если для **любого** положительного числа ε ($\varepsilon > 0$) можно подобрать такое положительное число δ ($\delta > 0$), зависящее от ε, что

$$|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon \text{ для всех } x \text{ таких, что } |x-x_0| < \delta. \quad (2)$$

Подчеркнем, что по самому смыслу данного определения функция $f(x)$ должна быть определена в некотором интервале, содержащем точку x_0.

В этом определении, которое искалось лучшими математиками мира более двухсот лет и было найдено всего немногим более ста лет назад, учтены все высказанные соображения. Суть этого определения будет видна из приведенных ниже примеров и доказательств теорем, где поясняется также, как вычислять δ по данному значению ε.

Примеры. 1. Покажем, что линейная функция $y=f(x)=3x+2$ непрерывна всюду, т. е. в любой точке x_0.

---

[1] Ниже по традиции употребляются греческие буквы: ε — «эпсилон» и δ — «дельта».

Для того чтобы это доказать, надо проверить, что эта функция удовлетворяет определению 6. Для этого возьмем точку (число) x_0 и положительное число $\varepsilon\,(\varepsilon > 0)$ и постараемся подобрать $\delta > 0$ такое, чтобы выполнялось условие (2). Если рассматривать x только такие, что $|x - x_0| < \delta$, то

$$|f(x) - f(x_0)| = |3x + 2 - (3x_0 + 2)| = 3\,|x - x_0| < 3\delta. \quad (3)$$

Отсюда видно, что достаточно взять $\delta = \varepsilon/3$, чтобы было

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Таким образом, для взятого $\varepsilon > 0$ нам удалось подобрать $\delta\,(=\varepsilon/3)$ такое, что выполнено условие (2). Поскольку все проведенные выше вычисления проделаны для произвольного $\varepsilon > 0$, то этим доказана непрерывность функции $y = 3x + 2$ во взятой точке x_0. Точка x_0 тоже произвольна — при вычислениях никаких ограничений на x_0 не накладывалось. Следовательно, функция $y = 3x + 2$ непрерывна всюду.

2. Рассмотрим общий случай линейной функции: $y = f(x) = kx + b$ — и покажем, что она непрерывна всюду. Возьмем точку x_0, число $\varepsilon > 0$ и будем подбирать δ. Поскольку

$$|f(x) - f(x_0)| = |kx + b - (kx_0 + b)| = |k|\,|x - x_0| < |k|\,\delta \quad (4)$$

для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, то из (4) видно, что при $k \neq 0$ достаточно взять $\delta = \varepsilon/|k|$, чтобы было

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Таким образом, для взятого $\varepsilon > 0$ мы подобрали $\delta(=\varepsilon/|k|)$ такое, что выполнено условие (2). Так как все приведенные выше вычисления проделаны при произвольном $\varepsilon > 0$, то этим доказана непрерывность функции $y = kx + b$ (при $k \neq 0$) во взятой точке x_0. Но на точку x_0 тоже никаких ограничений при вычислениях не накладывалось, и, следовательно, функция $y = kx + b\,(k \neq 0)$ непрерывна всюду. Если же $k = 0$, то $y = f(x) = b$ (т. е. y — постоянная) и

$$|f(x) - f(x_0)| = |b - b| = 0 < \varepsilon$$

для любых x. Поэтому можно, например, взять $\delta = 1$.

3. Покажем, что функция $y=f(x)=\sin x$ непрерывна всюду. Для этого сначала выведем неравенство

$$|\sin\alpha|\leqslant|\alpha| \tag{5}$$

при любых α (радиан). Пусть $0<\alpha<\pi/2$. Возьмем окружность радиуса 1 и проведем (рис. 15) $AB\perp BC$. Тогда

$$\sin\alpha=AB<AC<\overset{\frown}{AC}=\alpha,$$

т. е. (5) доказано для α таких, что $0<\alpha<\pi/2$. Если $\alpha\geqslant\pi/2>1{,}5$, то $\alpha>\sin\alpha$, так как $\sin\alpha\leqslant 1$. Таким образом, (5) доказано для всех $\alpha>0$. Для $\alpha<0$ (5) тоже верно в силу того, что при изменении знака α значения правой и левой частей неравенства не изменяются. При $\alpha=0$ в (5) имеем равенство.

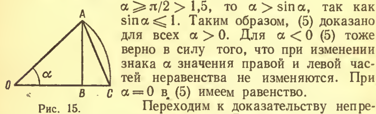


Рис. 15.

Переходим к доказательству непрерывности синуса. Возьмем точку x_0, число $\varepsilon>0$ и рассмотрим разность

$$|f(x)-f(x_0)|=|\sin x-\sin x_0|=$$
$$=2\left|\cos\frac{x+x_0}{2}\right|\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\leqslant 2\cdot 1\cdot\left|\frac{x-x_0}{2}\right|=|x-x_0| \tag{6}$$

в силу (5). Из (6) следует, что если взять $\delta=\varepsilon$, то для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x-x_0|<\delta$, будет

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

Так как все эти вычисления проделаны для любого $\varepsilon>0$, то непрерывность синуса во взятой точке x_0 доказана. А так как на x_0 никаких ограничений при вычислениях не накладывалось, то функция $y=\sin x$ непрерывна всюду.

4. Что значит выражение «непрерывная линия»? Остановимся пока на наивном объяснении: «линия непрерывна, если ее можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги». Ниже мы будем рассматривать только графики функций, так что у линий, о которых пойдет речь, не будет «вертикальных» кусков.

Пусть непрерывная линия L есть график функции $y=f(x)$. Возьмем на L точку $M_0(x_0;\ f(x_0))$, проведем прямые

$$y=f(x_0)+\varepsilon \text{ и } y=f(x_0)-\varepsilon,\ \varepsilon>0,$$

и рассмотрим полосу между этими прямыми (на рис. 16 эта полоса заштрихована). В силу того, что линия L непрерывна, некоторая дуга этой линии, содержащая точку M_0, будет лежать целиком внутри заштрихованной полосы, а так как на линии L нет «вертикальных кусков», то эта дуга проектируется на ось абсцисс в интервал $(a;\ b)$ такой, что $a < x_0 < b$. Обозначим через δ меньшее из расстояний от точки x_0 до концов этого

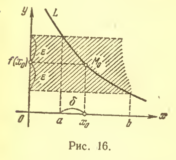


Рис. 16.

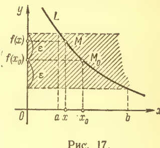


Рис. 17.

интервала. Если x таково, что $|x-x_0| < \delta$, то точка x лежит внутри интервала $(a;\ b)$, а тогда точка $M(x;\ f(x))$ лежит на дуге линии L, попавшей внутрь полосы (рис. 17), но это значит, что $|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$. Так как проведенное рассуждение верно для любого $\varepsilon > 0$, то мы пришли к определению 6. Таким образом, наивное представление о непрерывности линии приводит к нашему определению непрерывности функции в точке (определение 6).

5. Покажем, что функция $y = f(x) = x^2$ непрерывна всюду. Возьмем точку x_0, число $\varepsilon > 0$ и рассмотрим разность

$$|f(x)-f(x_0)| = |x^2-x_0^2| = |x-x_0|\,|x+x_0| < \delta\,|x+x_0| \quad (7)$$

для всех x таких, что $|x-x_0| < \delta$. Здесь подобрать δ уже немного сложнее, чем в примерах 1, 2 и 3, так как положить $\delta = \varepsilon : |x+x_0|$ (как это делалось там) нельзя — ведь δ не должно зависеть от x. Поэтому будем подбирать δ постепенно. Сначала потребуем, чтобы было $\delta \leqslant 1$ (можно вместо 1 взять и любое другое положительное число). Тогда для всех x таких, что $|x-x_0| < \delta$,

имеем

$$|x+x_0|=|x-x_0+2x_0|\leqslant|x-x_0|+2|x_0|<\delta+2|x_0|\leqslant \leqslant 1+2|x_0|,$$

и при этих x (7) примет вид

$$|f(x)-f(x_0)|<\delta(1+2|x_0|). \qquad (8)$$

Если теперь взять $\delta\leqslant\varepsilon/(1+2|x_0|)$, то из (8) следует неравенство

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,$$

верное для всех x таких, что $|x-x_0|<\delta$. Так как все приведенные выше вычисления имеют смысл при любом $\varepsilon>0$, то этим доказана непрерывность функции $y=x^2$ при взятом x_0. А так как на x_0 никаких ограничений при вычислениях не накладывалось, то $y=x^2$ есть функция, непрерывная всюду.

Заметим, что в этом примере δ можно взять равным наименьшему из чисел 1 и $\varepsilon/(1+2|x_0|)$; это коротко записывают так:

$$\delta=\min(1;\ \varepsilon/(1+2|x_0|)).$$

6. Покажем, что функция $y=f(x)=1/x$ непрерывна при любом $x_0\neq 0$. Прежде всего, ясно, что при $x_0=0$ эта функция не определена и не имеет смысла выражение $f(0)$, фигурирующее в условии (2). Уже только по этой причине нельзя говорить о непрерывности $y=1/x$ в нуле.

Переходим к доказательству непрерывности. Возьмем $x_0\neq 0$, число $\varepsilon>0$ и рассмотрим разность

$$|f(x)-f(x_0)|=\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right|=\frac{|x-x_0|}{|x|\cdot|x_0|}<\frac{\delta}{|x|\cdot|x_0|} \qquad (9)$$

для всех x таких, что $|x-x_0|<\delta$. Опять будем подбирать δ постепенно.

Прежде всего, δ должно быть таким, что для любого x, удовлетворяющего неравенству $|x-x_0|<\delta$, имела смысл рассматриваемая функция $y=1/x$, т. е. $x=0$ не должно удовлетворять этому неравенству (рис. 18). Следовательно, должно быть $\delta<|x_0|$. Возьмем для определенности $\delta\leqslant\frac{1}{2}|x_0|$. Тогда для любого x такого, что $|x-x_0|<\delta$, будет (см.

приложение § 2)

$$|x| = |x_0 + x - x_0| \geqslant |x_0| - |x - x_0| > |x_0| - \delta \geqslant$$
$$\geqslant |x_0| - \frac{1}{2}|x_0| = \frac{1}{2}|x_0|$$

и неравенство (9) примет вид

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{\delta}{\frac{1}{2}|x_0|^2},$$

откуда ясно, что если взять $\delta \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon|x_0|^2$, то будет

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Таким образом, если взять $\delta = \min\left(\frac{1}{2}|x_0|;\ \frac{1}{2}\varepsilon|x_0|^2\right)$, то будет выполнено условие (2). Так как все вычисления, проведенные выше, имеют смысл при любом $\varepsilon > 0$, то непрерывность функции $y = 1/x$ при взятом x_0 доказана. Так как единственное ограничение на x_0 было $x_0 \neq 0$, то функция $y = 1/x$ непрерывна для любых $x_0 \neq 0$, т. е. всюду в области определения.

Мы доказали здесь непрерывность некоторых основных элементарных функций. Оказывается, что каждая основная элементарная функция непрерывна внутри области

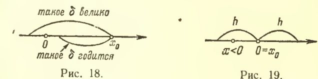


Рис. 18. Рис. 19.

своего определения (т. е. в каждой внутренней точке области определения). Доказывать это мы не будем из-за сложности вычислений, но пользоваться этим фактом будем. Поясним только кое-что на примерах.

Функция $y = \lg x$ определена при $x > 0$ и непрерывна при любом $x_0 > 0$, т. е. всюду в области определения. Функция $y = \sqrt{x}$ определена при $x \geqslant 0$ и непрерывна при любом $x_0 > 0$ (это — внутренняя точка области определения). При $x_0 = 0$ (это уже не внутренняя точка области определения функции $y = \sqrt{x}$) нет такого интервала

$(x_0-h;\ x_0+h)=(-h;\ h)$, $h>0$, в котором была бы определена функция $y=\sqrt{x}$,— при любом $h>0$ в этот интервал попадают $x<0$, для которых эта функция не определена (рис. 19). Поэтому говорить о непрерывности функции $y=\sqrt{x}$ в точке $x_0=0$ мы пока не имеем права. Как поступать в этом случае, будет рассказано в § 3.

Если в точке x_0 функция $y=f(x)$ определена, но не непрерывна, то точка x_0 называется *точкой разрыва* функции $f(x)$. Например, для функции

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{при } x\geqslant 0, \\ -1 & \text{при } x<0 \end{cases}$$

точка $x_0=0$ есть точка разрыва. Происхождение этого термина легко объяснить, рассмотрев график этой функции

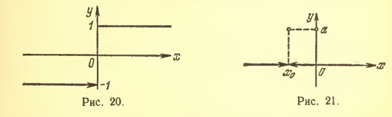


Рис. 20. Рис. 21.

(рис. 20), построение которого можно себе наглядно представить следующим образом: взяли прямую $y=1$, разорвали ее при $x=0$ и левую часть опустили вниз (стрелка на графике символически обозначает, что $f(0)\neq -1$, а $f(0)=+1$ — там стрелки нет). Поясним теперь, почему $x_0=0$ есть точка разрыва этой функции. Здесь $f(x_0)=f(0)=1$. Если $x<0$, то $f(x)=-1$ и разность

$$|f(x)-f(x_0)|=|-1-1|=2.$$

А так как при любом $\delta>0$ есть отрицательные числа x, удовлетворяющие неравенству $|x-x_0|<\delta$ (которое в нашем случае превращается в неравенство $|x|<\delta$) (см. рис. 19), то для $\varepsilon=1$ число δ, удовлетворяющее условию (2), найти нельзя, так что точка $x_0=0$ не будет точкой непрерывности взятой функции.

Вот где видна роль требования «для любого ε» в определении непрерывности! Здесь $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$, только

если $\varepsilon > 2$, а для $\varepsilon \leqslant 2$ это уже не так. Таким образом, условие (2) выполнено не для любого $\varepsilon > 0$.

Приведем еще один важный пример разрывной функции.

7. Пусть число $a \neq 0$, тогда для функции

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \neq x_0, \\ a \text{ при } x = x_0 \end{cases}$$

точка x_0 есть точка разрыва (рис. 21). Действительно, при $x \neq x_0$ выполняется равенство $|f(x) - f(x_0)| = |a|$; поэтому если взять $\varepsilon = |a|/2$ (это положительное число), то какое бы $\delta > 0$ мы ни брали, всегда найдется $x \neq x_0$, удовлетворяющее неравенству $|x - x_0| < \delta$, для которого $|f(x) - f(x_0)| = |a| > \varepsilon$. Следовательно, для $\varepsilon = |a|/2$ мы не можем обеспечить условие (2), т. е. взятая функция в точке x_0 имеет разрыв.

Посмотрим еще на непрерывные функции с точки зрения приближенных вычислений. Пусть вам надо вычислить $f(\pi)$ и $g(\pi)$ для функций, графики которых изображены на рис. 22 и 23 (стрелка на рис. 23 условно обозначает, что $g(\pi)$ есть верхний конец отмеченного на оси Oy

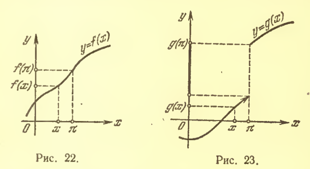


Рис. 22. Рис. 23.

отрезка, а не нижний — сравните с рис. 20). Вы, естественно, начинаете с вычисления $f(3,14)$ (берете $x = 3{,}14$ — значение π с недостатком), если точность мала, то добавляете еще верные знаки у π. Таким образом, вы вычисляете $f(x)$ для $x \neq \pi$ и уверены, что ошибетесь в значении функции мало, если взять достаточное число знаков у π, т. е. если мало ошибетесь в аргументе функции. Итак, с непрерывными функциями просто вести приближенные вычисления: вам задана точность вычислений — число ε —

величина, больше которой не должна быть ошибка вычисления, а вы смотрите, какую при этом можно допустить погрешность в значении аргумента, т. е. каково δ такое, чтобы $|f(x)-f(\pi)|<\varepsilon$ для x таких, что $|x-\pi|<\delta$. Для непрерывных функций такое δ всегда можно подобрать: на рис. 22 видно — чем ближе x к π, тем ближе $f(x)$ к $f(\pi)$. Так, в примере 3 было установлено, что можно взять $\delta=\varepsilon$, т. е. сколько верных знаков для $\sin x$ желаете иметь, столько верных знаков и надо брать у x (в простейшем случае).

Совершенно иное положение с разрывной функцией $g(x)$ (рис. 23). Если поступать так же, как в предыдущем случае, т. е. вычислять $g(3{,}14)$ вместо $g(\pi)$, взяв приближенное значение π с недостатком, то вы сделаете ошибку больше, чем длина отмеченного на оси Oy отрезка. И никакое добавление верных знаков у π (с недостатком) не сделает ошибку вычисления меньше длины отмеченного отрезка. Следовательно, разрывные функции непригодны для приближенных вычислений (точнее, вычисления с ними связаны с большими осложнениями).

Было бы хорошо, если бы все, написанное в этом параграфе, не заслонило бы вам простейшие наглядные представления, связанные с непрерывными функциями: при малом изменении аргумента мало меняется функция, или значения $f(x)$ для x, близких к x_0, группируются около числа $f(x_0)$, или $f(x)\approx f(x_0)$ для всех x, достаточно близких к x_0, и точность этого равенства может быть сделана как угодно большой за счет приближения x к x_0.

Рассмотрим некоторые свойства непрерывных функций. Эти свойства формулируются ниже в виде теорем.

Теорема 1. *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0, то функции $f(x)\pm g(x)$ непрерывны в точке x_0.*

Возьмем число $\varepsilon>0$. Число $\varepsilon/2>0$, и в силу непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 можно подобрать такое число $\delta_1>0$, что

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon/2 \text{ для всех } x \text{ таких, что } |x-x_0|<\delta_1, \quad (10)$$

а в силу непрерывности функции $g(x)$ в точке x_0 для числа $\varepsilon/2>0$ можно подобрать такое число $\delta_2>0$, что

$$|g(x)-g(x_0)|<\varepsilon/2 \text{ для всех } x \text{ таких, что } |x-x_0|<\delta_2. \quad (11)$$

Возьмем $\delta=\min(\delta_1;\ \delta_2)$; тогда для любого x, удовлетво-

ряющего неравенству $|x-x_0|<\delta$, будут выполнены оба первых неравенства в (10) и (11), и потому

$$|f(x)+g(x)-[f(x_0)+g(x_0)]|\leqslant$$
$$\leqslant|f(x)-f(x_0)|+|g(x)-g(x_0)|<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon.$$

Так как эти вычисления верны при любом $\varepsilon>0$, то непрерывность функции $f(x)+g(x)$ в точке x_0 доказана. Непрерывность функции $f(x)-g(x)$ доказывается аналогично.

Например, функция $y=\sin x+x^2$ непрерывна всюду как сумма непрерывных всюду функций $y=\sin x$ (доказано в примере 3) и $y=x^2$ (доказано в примере 5).

Теорема 2. *Если функция $t=g(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $y=f(t)$ непрерывна в точке $t_0=g(x_0)$, то сложная функция $f(g(x))$ непрерывна в точке x_0.*

Возьмем число $\varepsilon>0$. Так как функция $f(t)$ непрерывна в точке $t_0=g(x_0)$, то можно подобрать такое число $\delta_1>0$, что

$$|f(t)-f(t_0)|<\varepsilon \text{ для всех } t \text{ таких, что } |t-t_0|<\delta_1. \quad (12)$$

А так как функция $t=g(x)$ непрерывна в точке x_0, то для положительного числа δ_1 можно подобрать такое число $\delta>0$, что

$$|g(x)-g(x_0)|<\delta_1 \text{ для всех } x \text{ таких, что } |x-x_0|<\delta. \quad (13)$$

Возьмем любое число x такое, что $|x-x_0|<\delta$. Что можно сказать о $|f(g(x))-f(g(x_0))|$? Посмотрим, как получены числа $y=f(g(x))$ и $y_0=f(g(x_0))$. Сначала находятся (в силу определения) числа $t=g(x)$ и $t_0=g(x_0)$; в силу (13) $|t-t_0|=|g(x)-g(x_0)|<\delta_1$. По этим числам находятся $y=f(t)$ и $y_0=f(t_0)$, для которых в силу (12) $|y-y_0|=$ $=|f(t)-f(t_0)|<\varepsilon$. Таким образом,

$$|f(g(x))-f(g(x_0))|<\varepsilon.$$

Так как все эти вычисления проведены для любого $\varepsilon>0$, то непрерывность функции $f(g(x))$ в точке x_0 доказана. Из этой теоремы вытекает, например, что функция $y=F(x)=\cos x$ непрерывна всюду, поскольку ее можно рассматривать как сложную функцию

$$\left.\begin{aligned} y&=\sin t,\\ t&=(\pi/2)-x,\end{aligned}\right\}\ y=F(x)=\sin((\pi/2)-x)=\cos x,$$

составленную из всюду непрерывных функций (примеры 2 и 3).

Теорема 3. *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0, то функции $kg(x)$ (k — постоянная), $f(x)g(x)$ и $f(x):g(x)$* (последняя при условии $g(x_0) \neq 0$) *непрерывны в точке x_0.*

Так как линейная функция $l(t) = kt$ непрерывна всюду (пример 2), то в силу теоремы 2 сложная функция $l(g(x)) = kg(x)$ непрерывна в точке x_0.

Для доказательства непрерывности произведения сначала заметим, что если функция $y = h(x)$ непрерывна в точке x_0, то функция $y = h^2(x)$ тоже непрерывна в точке x_0. Действительно, функция $y = q(t) = t^2$ непрерывна всюду (пример 5), и потому сложная функция $y = q(h(x)) = h^2(x)$ непрерывна в точке x_0 в силу теоремы 2. А так как

$$f(x)g(x) = \frac{1}{4}\{[f(x)+g(x)]^2 - [f(x)-g(x)]^2\},$$

то непрерывность произведения следует из теоремы 1. В самом деле, функции $f(x)+g(x)$ и $f(x)-g(x)$ в силу теоремы 1 непрерывны в точке x_0, а потому их квадраты тоже непрерывны в точке x_0. Следовательно, функция, стоящая в фигурных скобках, непрерывна в точке x_0 (опять в силу теоремы 1), а после умножения на постоянную 1/4 снова получаем непрерывную функцию, как это было доказано вначале.

В примере 6 было показано, что функция $y = r(t) = 1/t$ непрерывна при любом $t_0 \neq 0$. Поэтому сложная функция $y = r(g(x)) = 1/g(x)$ непрерывна в точке x_0 в силу теоремы 2 (эта теорема применима, так как $t_0 = g(x_0) \neq 0$ по условию). Отсюда следует непрерывность частного в точке x_0, поскольку

$$f(x):g(x) = f(x)\,(1/g(x)),$$

а произведение непрерывных функций, как доказано выше, есть непрерывная функция.

Как применение этой теоремы получаем, что функция $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ непрерывна всюду, где $\cos x \neq 0$; функция

$$y = \frac{x^3 + \sin x}{x^4 + 7}.$$

непрерывна всюду; функция

$$y=\frac{3^x-\operatorname{arctg}\sqrt[5]{x}}{x^2-4}$$

непрерывна при $x \neq \pm 2$.

Заметим, что по индукции легко доказывается, что сумма и произведение n непрерывных функций есть тоже непрерывная функция. Поэтому степенная функция $y=x^n$ (n — натуральное) есть функция непрерывная, как произведение n непрерывных функций $f(x)=x$. Следовательно, функция $y=1/x^n$ непрерывна при $x \neq 0$, и тем самым мы показали непрерывность степенной функции при целом показателе во всей ее области определения.

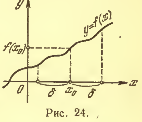


Рис. 24.

Теорема 4. *Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $f(x_0)>0$, то можно указать такое $\delta>0$, что*

$$f(x)>0 \text{ для любых } x \text{ таких, что } |x-x_0|<\delta.$$

Возьмем $\varepsilon=f(x_0)>0$ и по нему найдем $\delta>0$ (в силу непрерывности $f(x)$) такое, что

$$|f(x)-f(x_0)|<f(x_0) \text{ для любых } x \text{ таких, что } |x-x_0|<\delta.$$

Тогда для всех таких x будет $f(x)-f(x_0)>-f(x_0)$, или $f(x)>0$, что и требовалось доказать.

Геометрически теорема 4 сразу видна на рис. 24. Аналогичное заключение верно и при $f(x_0)<0$.

§ 3. Предел функции

Пусть функция $f(x)$ определена в некотором интервале $(x_0-h;\ x_0+h)$, $h>0$, за исключением, быть может, точки x_0. В этой точке x_0 для функции $f(x)$ возможны, как легко видеть, только следующие случаи: 1) непрерывность, 2) разрыв, 3) функция не определена в точке x_0. Однако бывает так, что в двух последних случаях функции $f(x)$ можно приписать в точке x_0 такое значение A, что она станет непрерывной в точке x_0. Это называется *доопределить функцию $f(x)$ по непрерывности* в точке x_0,

а число A называется тогда пределом функции $f(x)$ при x, стремящемся к x_0.

Определение 7. Число A называется *пределом функции* $f(x)$ *при* x, *стремящемся к* x_0 $(x \to x_0)$, если функция

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при} \quad x \neq x_0, \\ A & \text{при} \quad x = x_0 \end{cases} \qquad (14)$$

непрерывна в точке x_0. Коротко (символически) это записывают так:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A. \qquad (15)$$

Например, если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то, взяв $A = f(x_0)$, мы получим, что $F(x) = f(x)$, и, следовательно, для любой непрерывной в точке x_0 функции справедливо равенство

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \qquad (16)$$

и обратно. Таким образом, в силу результатов § 2

$$\lim_{x \to 0} \cos x = \cos 0 = 1, \quad \lim_{x \to 7} \log_3 x = \log_3 7$$

и т. п.

Рассмотрим еще функцию

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 1}.$$

Она не определена в точке $x_0 = -1$. Посмотрим, можно ли ее в этой точке доопределить по непрерывности, т. е. существует ли предел этой функции при x, стремящемся к -1 $(x \to -1)$. Для этого надо попытаться подобрать функцию $F(x)$, равную $f(x)$ при $x \neq -1$ и такую, чтобы $F(x)$ была непрерывной в точке -1. Но при $x \neq -1$

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 1} = \frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x-2}{x-1}$$

$(x + 1 \neq 0$, и, следовательно, сокращать можно). Полученная дробь непрерывна в точке -1. Действительно, в числителе и знаменателе этой дроби стоят линейные функции, которые непрерывны всюду (пример 2), а при $x = -1$ знаменатель не равен нулю; отсюда в силу теоремы 3 следует непрерывность этой дроби. Поэтому можно

положить

$$F(x) = \frac{x-2}{x-1}.$$

Отсюда вытекает, что предел функции $f(x)$ при $x \to -1$ существует и равен $F(-1) = 3/2$.

Коротко приведенные выше рассуждения записываются так (цифра под знаком равенства указывает на рассуждение, в силу которого это равенство верно):

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2-x-2}{x^2-1} = \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(x-1)} \underset{(1)}{=} \underset{(1)}{=} \lim_{x \to -1} \frac{x-2}{x-1} \underset{(2)}{=} \frac{-1-2}{-1-1} = \frac{3}{2};$$

(1) сокращать на $x+1$ можно, так как функция, стоящая под знаком предела, рассматривается только при $x \neq -1$, так что $x+1 \neq 0$;

(2) под знаком предела стоит непрерывная функция; пользуемся равенством (16).

Какие наглядные представления полезно связать с пределом функции? Непрерывность функции $F(x)$ в точке x_0 означает, что $F(x) \approx F(x_0)$ для всех x, близких к x_0, и точность этого равенства можно сделать как угодно большой за счет приближения x к x_0. Если это переписать в терминах функции $f(x)$, то получим: равенство (15) означает, что $f(x) \approx A$ для всех $x \neq x_0$ и близких к x_0 (при $x = x_0$ функция $f(x)$ может быть не определена, а для $x \neq x_0$ $F(x) = f(x)$; $F(x_0) = A$) и точность этого равенства можно сделать как угодно большой за счет приближения x к x_0.

Теорема 5. *Если существуют* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ *и* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$, *то*

1) $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$;

2) $\lim\limits_{x \to x_0} kf(x) = k \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ (k — *постоянная*);

3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)\, g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$;

4) $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) : g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) : \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$,

если $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$.

Пусть $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$ и $\lim_{x \to x_0} g(x) = B$. Тогда функции

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при } x \neq x_0, \\ A & \text{при } x = x_0 \end{cases} \quad \text{и} \quad G(x) = \begin{cases} g(x) & \text{при } x \neq x_0, \\ B & \text{при } x = x_0 \end{cases}$$

непрерывны в точке x_0 в силу определения 7. В силу теорем 1 и 3 функции $F(x) \pm G(x)$, $F(x) G(x)$ и $F(x):G(x)$ непрерывны в точке x_0 (последняя в силу того, что $G(x_0) = B = \lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0$ по условию теоремы 5,4)). Но

$$1) \ F(x) + G(x) = \begin{cases} f(x) + g(x) & \text{при } x \neq x_0, \\ A + B & \text{при } x = x_0. \end{cases}$$

Отсюда, в силу непрерывности в точке x_0 функции $F(x) + G(x)$ и определения 7, следует, что

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = A + B = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x).$$

Случай разности рассматривается аналогично.

$$3) \ F(x) G(x) = \begin{cases} f(x) g(x) & \text{при } x \neq x_0, \\ AB & \text{при } x = x_0, \end{cases}$$

откуда, в силу непрерывности в точке x_0 произведения $F(x) G(x)$ и определения 7, следует, что

$$\lim_{x \to x_0} f(x) g(x) = AB = \lim_{x \to x_0} f(x) \lim_{x \to x_0} g(x);$$

$$4) \ F(x):G(x) = \begin{cases} f(x):g(x) & \text{при } x \neq x_0, \\ A:B & \text{при } x = x_0, \end{cases}$$

откуда, в силу определения 7 и непрерывности в точке x_0 функции $F(x):G(x)$, следует, что

$$\lim_{x \to x_0} [f(x):g(x)] = A:B = \lim_{x \to x_0} f(x) : \lim_{x \to x_0} g(x).$$

2) Заметим, что линейная функция $g(x) = k$ — постоянная, непрерывна всюду (пример 2) и потому $\lim_{x \to x_0} k = k$ (формула (16)), после чего, пользуясь уже доказанным пунктом 3), получаем

$$\lim_{x \to x_0} kf(x) = \lim_{x \to x_0} k \lim_{x \to x_0} f(x) = k \lim_{x \to x_0} f(x).$$

Теорема 6. *Если существует* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = t_0$, *а функция* $f(t)$ *непрерывна в точке* t_0, *то*

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f(\lim_{x \to x_0} g(x)).$$

Коротко говорят: знак предела и знак непрерывной функции можно менять местами.

Рассмотрим непрерывную в точке x_0 (в силу определения 7 и условия теоремы $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = t_0$) функцию

$$G(x) = \begin{cases} g(x) & \text{при } x \neq x_0, \\ t_0 & \text{при } x = x_0. \end{cases}$$

Сложная функция $f(G(x))$ в силу теоремы 2 непрерывна в точке x_0. Но

$$f(G(x)) = \begin{cases} f(g(x)) & \text{при } x \neq x_0, \\ f(t_0) & \text{при } x = x_0, \end{cases}$$

откуда, в силу непрерывности функции $f(G(x))$ в точке x_0 и определения 7, получаем

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f(t_0) = f\left(\lim_{x \to x_0} g(x)\right).$$

Например, функция $\sqrt[5]{t}$ непрерывна всюду, так что

$$\lim_{x \to 2} \sqrt[5]{\frac{x^3-8}{x^2-x-2}} = \sqrt[5]{\lim_{x \to 2} \frac{x^3-8}{x^2-x-2}} =$$

$$= \sqrt[5]{\lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+1)}} = \sqrt[5]{\lim_{x \to 2} \frac{x^2+2x+4}{x+1}} =$$

$$= \sqrt[5]{\frac{12}{3}} = \sqrt[5]{4}.$$

Теорема 7 (замена переменной). *Если существуют* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = t_0$ *и* $\lim\limits_{t \to t_0} f(t)$, *а* $g(x) \neq t_0$ *при* $x \neq x_0$, *то выполняется равенство*

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = \lim_{t \to t_0} f(t).$$

При этом говорят, что в пределе слева сделана замена $t = g(x)$.

Пусть $\lim\limits_{t\to t_0} f(t)=A$. Тогда функции

$$F(t)=\begin{cases} f(t) & \text{при } t\neq t_0,\\ A & \text{при } t=t_0\end{cases} \quad \text{и} \quad G(x)=\begin{cases} g(x) & \text{при } x\neq x_0,\\ t_0 & \text{при } x=x_0\end{cases}$$

непрерывны в точке t_0 и x_0 соответственно (в силу условия теоремы $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=t_0$ и определения 7). По теореме 2 сложная функция $F(G(x))$ непрерывна в точке x_0. Но

$$F(G(x))=\begin{cases} f(g(x)) & \text{при } x\neq x_0,\\ A & \text{при } x=x_0,\end{cases}$$

так как при $x\neq x_0$ числа $G(x)=g(x)\neq t_0$ по условию теоремы, так что $F(G(x))=f(g(x))$. Поскольку функция $F(G(x))$ непрерывна в точке x_0, то по определению 7 из предыдущего следует, что

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x))=A=\lim_{t\to t_0} f(t).$$

Заметим, что условие теоремы «$g(x)\neq t_0$ при $x\neq x_0$» можно заменить на условие «$g(x)\neq t_0$ для всех $x\neq x_0$ из некоторого интервала $(x_0-h;\ x_0+h)$» — доказательство при этом несколько усложнится.

Например,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{2\sin^2 x+\sin x-1}{4\cos^2 x-3} \underset{(1)}{=} \lim_{t\to 1/2} \frac{2t^2+t-1}{4(1-t^2)-3}=$$

$$=\lim_{t\to 1/2} \frac{2\left(t-\frac{1}{2}\right)(t+1)}{-4\left(t-\frac{1}{2}\right)\left(t+\frac{1}{2}\right)} \underset{(2)}{=} -\frac{1}{2}\lim_{t\to 1/2}\frac{t+1}{t+\frac{1}{2}} \underset{(3)}{=}$$

$$\underset{(3)}{=} -\frac{1}{2}\,\frac{\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=-\frac{3}{4};$$

(1) делаем замену $t=\sin x$, $t_0=\lim\limits_{x\to\pi/6}\sin x=\frac{1}{2}$;

(2) сокращаем на $t-\frac{1}{2}$, что можно делать, так как функция, стоящая под знаком предела, рассматривается при $t\neq 1/2$;

(3) под знаком предела стоит непрерывная функция, пользуемся равенством (16).

Естественно возникает вопрос: сколько пределов при $x \to x_0$ может иметь функция? В определении об этом ничего не говорится. Априори не исключено, что функция может иметь два или даже более пределов. Сейчас мы докажем, что этого быть не может, т. е. при $x \to x_0$ функция $f(x)$ или имеет единственный предел, или у нее предела нет — ничего третьего быть не может. Об этом говорит следующая теорема:

Теорема 8 (единственность предела). *При $x \to x_0$ функция $f(x)$ не может иметь двух пределов.*

Доказательство проведем от противного: предположим, что функция $f(x)$ при $x \to x_0$ имеет два разных предела — числа A и B, $A \neq B$. Тогда функции

$$F_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при } x \neq x_0, \\ A & \text{при } x = x_0 \end{cases} \quad \text{и} \quad F_2(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при } x \neq x_0, \\ B & \text{при } x = x_0 \end{cases}$$

непрерывны в точке x_0 в силу определения 7. Их разность

$$F_1(x) - F_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \neq x_0, \\ A - B & \text{при } x = x_0 \end{cases}$$

по теореме 1 тоже непрерывна в точке x_0, но это противоречит примеру 7, поскольку $A - B \neq 0$. Это противоречие получено из-за предположения, что у функции есть два различных предела. Следовательно, двух различных пределов у функции быть не может.

Теорема 9 (о промежуточной функции). *Если*

$$f(x) \leqslant p(x) \leqslant g(x) \text{ при всех } x \neq x_0 \tag{17}$$

и

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = A, \tag{18}$$

то

$$\lim_{x \to x_0} p(x) = A. \tag{19}$$

В силу определения 7 функция $F(x)$ в (14) непрерывна в точке x_0. Это значит (определение 6), что для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta_1 > 0$, что

$$|F(x) - F(x_0)| < \varepsilon \text{ для всех } x \text{ таких, что } |x - x_0| < \delta_1. \tag{20}$$

Перепишем это в терминах функции $f(x)$, заметив, что $F(x_0)=A$ и $F(x)=f(x)$ при $x\neq x_0$:

$$|f(x)-A|<\varepsilon \text{ для всех } x\neq x_0 \text{ и таких, что } |x-x_0|<\delta_1. \quad (21)$$

Аналогично (18) означает, что можно найти такое $\delta_2>0$, что

$$|g(x)-A|<\varepsilon \text{ для всех } x\neq x_0 \text{ и таких, что } |x-x_0|<\delta_2. \quad (22)$$

Возьмем $\delta=\min(\delta_1;\ \delta_2)$. Тогда для любого $x\neq x_0$ и такого, что $|x-x_0|<\delta$, выполнены условия (21) и (22) одновременно. Из (21) следует, что $-\varepsilon<f(x)-A$. Из (22) следует, что $g(x)-A<\varepsilon$. Отсюда и из (17) получаем $-\varepsilon<f(x)-A\leqslant p(x)-A\leqslant g(x)-A<\varepsilon$. Следовательно, $-\varepsilon<p(x)-A<\varepsilon$, т. е.

$$|p(x)-A|<\varepsilon \text{ для всех } x\neq x_0 \text{ и таких, что } |x-x_0|<\delta. \quad (23)$$

В силу произвольности $\varepsilon>0$ условие (23) означает непрерывность функции

$$P(x)=\begin{cases} p(x) & \text{при } x\neq x_0, \\ A & \text{при } x=x_0 \end{cases}$$

в точке x_0. Этим — см. определение 7 — формула (19) доказана.

Заметим, что условие теоремы в (17) «при $x\neq x_0$» можно заменить на условие «при всех $x\neq x_0$ из некоторого интервала $(x_0-h;\ x_0+h)$» — доказательство при этом несколько усложнится.

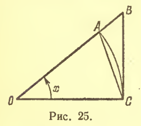


Рис. 25.

В качестве применения этой теоремы докажем формулу, которая по традиции называется

Первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \quad (24)$$

Для доказательства возьмем сектор OAC окружности радиуса 1 (рис. 25) с центральным углом, равным x (радиан), $0<x<\pi/2$, и проведем $BC\perp OC$.

Тогда

$$\text{пл. } \triangle OAC < \text{пл. сект. } OAC < \text{пл. } \triangle OBC$$

или

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x.$$

Разделив все части этого неравенства на $\frac{1}{2}\sin x > 0$, получим

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \quad \text{или} \quad 1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x. \tag{25}$$

Это неравенство, доказанное для любых x из интервала $(0; \pi/2)$, верно для любого $x \neq 0$ из интервала $(-\pi/2; \pi/2)$ в силу четности функций, входящих в это неравенство. Так как, кроме того,

$$\lim_{x \to 0} \cos x = 1 \quad \text{и} \quad \lim_{x \to 0} 1 = 1, \tag{26}$$

то в силу теоремы 9 из (25) и (26) следует (24).

Например, если в приведенном ниже примере сделать замену по формуле $t = 3x$, то получим

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{\frac{1}{3}t} = 3\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 3 \cdot 1 = 3.$$

Значительно сложнее доказать (и мы этого делать не будем), что функция $(1+x)^{1/x}$ при $x \to 0$ имеет предел. Этот предел обозначается буквой e в честь открывшего его петербургского математика Леонарда Эйлера. Установлено, что это — иррациональное число и что $e = 2{,}718281828459\ldots$ Формула, определяющая число e, по традиции называется **Второй замечательный предел:**

$$e = \lim_{x \to 0} (1+x)^{1/x}. \tag{27}$$

На первый взгляд кажется, что $(1+x)^{1/x}$ при $x \to 0$ имеет пределом единицу (так как $1+x$ при $x \to 0$ имеет пределом единицу, а единица в любой степени есть единица). Но в степень $1/x$ возводится $1+x$, а не единица, и вот именно из-за этой бесконечно малой добавки x предел не равен единице. Чтобы приблизительно представить

себе поведение функции $(1+x)^{1/x}$ при малых x, приведем таблицу значений этой функции:

x	1/2	1/3	1/4	0,01	0,001
$(1+x)^{1/x}$	2,25	2,37...	2,44...	2,7047...	2,7169...

Из этой таблицы видно, что с уменьшением x функция увеличивается. Оказывается, что это имеет место для всех $x > 0$, и потому предел (27) больше 2,7.

Например, если в приведенном ниже примере сделать замену по формуле $t = -5x$, то получим

$$\lim_{x\to 0} (1-5x)^{1/2x} = \lim_{t\to 0} (1+t)^{-5/2t} = \left[\lim_{t\to 0} (1+t)^{1/t}\right]^{-5/2} = e^{-5/2} = 1/\sqrt{e^5}.$$

Часто приходится иметь дело с логарифмами при основании e; они называются натуральными логарифмами и обозначаются $\ln x$:

$$\ln x = \log_e x. \qquad (28)$$

Для них основное логарифмическое тождество имеет вид

$$e^{\ln x} = x. \qquad (29)$$

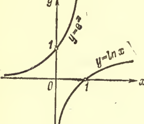


Рис. 26.

Приведем еще графики функций $y = e^x$ и $y = \ln x$ (рис. 26).

Пользуясь вторым замечательным пределом, выведем формулы (их надо запомнить как и замечательные пределы):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \qquad (30)$$

и

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a. \qquad (31)$$

Действительно, в силу непрерывности функции $\ln t$

имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x}=\ln\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=\ln e=1.$$

Для доказательства (31) сделаем замену $t=a^x-1$; тогда $x=\frac{\ln(1+t)}{\ln a}$ и $\lim\limits_{x\to 0}(a^x-1)=0$, так что

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t\ln a}{\ln(1+t)}=\ln a\frac{1}{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}}=\ln a\cdot\frac{1}{1}=\ln a.$$

Теорема 10. *Пусть* $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$. *Если* $f(x)\geqslant 0$, *то* $A\geqslant 0$. *Если* $f(x)\leqslant 0$, *то* $A\leqslant 0$.

Докажем, что из неравенства $f(x)\geqslant 0$ следует, что $A\geqslant 0$. Предположим противное: $f(x)\geqslant 0$, но $A<0$. Непрерывная в точке x_0 функция $F(x)$ в (14) такова, что $F(x_0)=A<0$. В силу теоремы 4 можно указать такое $\delta>0$, что для всех x таких, что $|x-x_0|<\delta$, будет $F(x)<0$, а тогда для $x\neq x_0$ будет $f(x)<0$ (так как $F(x)=f(x)$ при $x\neq x_0$), что противоречит условию $f(x)\geqslant 0$. Противоречие это получилось из-за предположения $A<0$. Следовательно, это предположение неверно и $A\geqslant 0$, что и требовалось доказать. Второе утверждение доказывается аналогично.

Теорема 11 (переход к пределу в неравенствах). *Если* $f(x)\leqslant g(x)$, *то*

$$\lim_{x\to x_0}f(x)\leqslant\lim_{x\to x_0}g(x)$$

(*если эти пределы существуют*).

По условию теоремы $g(x)-f(x)\geqslant 0$, и потому по теореме 10

$$0\leqslant\lim_{x\to x_0}[g(x)-f(x)]=\lim_{x\to x_0}g(x)-\lim_{x\to x_0}f(x).$$

Перенося $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ в левую часть последнего неравенства, получаем требуемое.

Заметим, что относительно неравенств, входящих в условия теорем 10 и 11, достаточно потребовать, чтобы они выполнялись для всех $x\neq x_0$ из некоторого интер-

вала $(x_0-h;\ x_0+h)$ — доказательство при этом несколько усложнится.

Определение 8. Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой* при $x \to x_0$, если

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0.$$

Бесконечно малые функции обычно обозначают греческими буквами $\alpha(x)$, $\beta(x)$, ... или, опуская аргумент, α, β, ...

Теорема 12. *Для равенства* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ *необходимо и достаточно, чтобы функция*

$$\alpha(x) = f(x) - A \qquad (32)$$

была бесконечно малой при $x \to x_0$.

Необходимость: если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, то

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = \lim_{x \to x_0} [f(x) - A] = \lim_{x \to x_0} f(x) - \lim_{x \to x_0} A = A - A = 0.$$

Достаточность: если $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \to x_0$, то

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} [A + \alpha(x)] = \lim_{x \to x_0} A + \lim_{x \to x_0} \alpha(x) = A + 0 = A.$$

В дальнейшем часто будут встречаться разности $x_1 - x$ и $f(x_1) - f(x)$; они называются соответственно *приращением аргумента* и *приращением функции* $y = f(x)$ и обозначаются

$$x_1 - x = \Delta x, \quad f(x_1) - f(x) = \Delta f(x) = \Delta f = \Delta y \qquad (33)$$

(рис. 27). Из этих обозначений получаются формулы

$$x_1 = x + \Delta x, \quad \Delta f = f(x + \Delta x) - f(x), \qquad (34)$$

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta f. \qquad (35)$$

Рис. 27.

В этой терминологии удобно говорить, что функция непрерывна, если бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции. Действительно, из равенства $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta f$ и теоремы 12 сразу следует: для того чтобы функция

была непрерывной в точке x_0, т. е. для равенства $\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$, необходимо и достаточно, чтобы приращение Δf было бесконечно малым при $\Delta x \to 0$.

Определение 9. Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой* при $x \to x_0$, если функция $1/f(x)$ — бесконечно малая при $x \to x_0$. То, что $f(x)$ есть бесконечно большая функция при $x \to x_0$, записывают так:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty. \tag{36}$$

Наглядное представление: запись (36) означает, что $f(x)$ может быть сделано как угодно велико (по модулю) за счет приближения x к x_0 (в простейших случаях — чем ближе x к x_0, тем больше $|f(x)|$).

Наконец, введем еще предел функции при x, стремящемся к бесконечности ($x \to \infty$), определив его равенством

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{t \to 0} f(1/t) \tag{37}$$

(смысл правой части этого равенства уже установлен в определении 7). Наглядное представление: равенство $\lim_{x \to \infty} f(x) = A$ означает, что $f(x) \approx A$ для всех x очень больших (по модулю) и точность этого равенства может быть сделана как угодно большой за счет увеличения $|x|$.

Примеры. 1. Пусть $n > 0$, тогда

$$\lim_{x \to \infty} 1/x^n = \lim_{t \to 0} t^n = 0.$$

2. $$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^3+5x+1}{4-x^2-7x^3} = \lim_{t \to 0} \frac{2(1/t^3)+5(1/t)+1}{4-(1/t^2)-7(1/t^3)} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{2+5t^2+t^3}{4t^3-t-7} = \frac{\lim_{t \to 0}(2+5t^2+t^3)}{\lim_{t \to 0}(4t^3-t-7)} = \frac{2}{-7} = -\frac{2}{7}.$$

3. $$\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^4+4x^2+1} - x^2\right) \underset{(1)}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{x^4+4x^2+1-x^4}{\sqrt{x^4+4x^2+1}+x^2} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{4(1/t^2)+1}{\sqrt{(1/t^4)+4(1/t^2)+1}+(1/t^2)} = \lim_{t \to 0} \frac{4+t^2}{\sqrt{1+4t^2+t^4}+1} =$$

$$= \frac{4}{2} = 2.$$

(1) В этом примере слагаемые — бесконечно большие функции, т. е. не имеют пределов, поэтому применять теорему о пределе разности нельзя. Говорят, что здесь имеется неопределенность типа $\infty - \infty$. Умножая и числитель и знаменатель на одно и то же выражение (от чего заданная разность не меняется), мы избавляемся от этой неопределенности.

Если функция $f(x)$ определена только при $x > x_0$ (рис. 28), то говорить о $\lim_{x \to x_0} f(x)$ нельзя, так как нет интервала $(x_0 - h;\ x_0 + h)$, на котором функция была бы определена. Так обстоит дело, например, для $f(x) = \sqrt{x}$ при $x_0 = 0$. Однако при малых $x > 0$ будет мал и $\sqrt{x}$

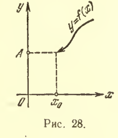


Рис. 28.

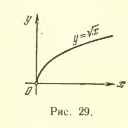


Рис. 29.

(рис. 29), т. е. ситуация здесь схожа со случаем бесконечно малой функции. А для функции рис. 28 ситуация похожа на случай, когда функция f при $x \to x_0$ имеет предел, равный A. Высказанные наглядные соображения наталкивают на мысль ввести следующие определения:

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = \lim_{t \to 0} f(x_0 + |t|) \qquad (38)$$

и

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = \lim_{t \to 0} f(x_0 - |t|), \qquad (39)$$

где символы, записанные в левых частях, называются *односторонними пределами*: (38) — *правым*, при x стремящимся к x_0 справа $(x \to x_0+)$, а (39) — *левым*, при x стремящимся к x_0 слева $(x \to x_0-)$. Смысл правых частей формул (38) и (39) известен из определения 7 — положение такое же, как с определением, данным формулой (37). Заметим, что аргумент функции f в правой части (38)

больше x_0, так как $|t|>0$, т. е. (38) имеет смысл и для функций, определенных только при $x>x_0$,— это как раз то, чего мы добивались. Таким образом, для функции, изображенной на рис. 28, уже можно написать $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)=A$. Аналогичные соображения имеют место и для левого предела (39), где аргумент функции f меньше x_0. Наглядное представление, связанное с записью $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)=A$, состоит в том, что $f(x)\approx A$ для всех $x>x_0$ и достаточно близких к x_0, и точность этого равенства может быть сделана как угодно большой за счет приближения x к x_0 (с сохранением условия $x>x_0$). Так что

$$\lim_{x\to 0+}\sqrt{x}=0,\quad \lim_{x\to 1-}\arcsin x=\frac{\pi}{2}\ \text{ и т. п.}$$

Теорема 13. *Если существует* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, *то*

$$\lim_{x\to x_0+} f(x)=\lim_{x\to x_0} f(x)\quad\text{и}\quad \lim_{x\to x_0-} f(x)=\lim_{x\to x_0} f(x).$$

По определению (38)

$$\lim_{x\to x_0+} f(x)=\lim_{t\to 0} f(x_0+|t|)\underset{(1)}{=}\lim_{z\to x_0} f(z).$$

(1) Делаем замену $z=x_0+|t|$, $\lim\limits_{t\to 0}(x_0+|t|)=x_0$ и $z(t)=x_0+|t|\neq x_0$ при $t\neq 0$, т. е. условия теоремы 7 выполнены.

Первое равенство доказано, так как предел функции не зависит от того, какой буквой обозначать ее аргумент. Второе равенство доказывается аналогично.

Из теоремы 13 следует: если $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$, то не существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. В самом деле, если бы существовал этот предел, то выполнялось бы равенство (в силу теоремы 13) $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$. Верно и обратное: последнее равенство гарантирует существование $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, но это доказать уже сложнее и мы этого делать не будем.

Покажем, например, что функция (рис. 20)

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{при } x\geqslant 0,\\ -1 & \text{при } x<0\end{cases}$$

не имеет предела при $x \to 0$. Действительно,

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0} f(0 - |t|) = \lim_{t \to 0} (-1) = -1,$$

а

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{t \to 0} 1 = 1,$$

т. е. правый предел не равен левому пределу.

Принята еще следующая терминология: если

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0),$$

то говорят, что функция $f(x)$ *непрерывна в точке* x_0 *справа* (сравните с (16)), если же

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0),$$

то говорят, что функция $f(x)$ *непрерывна в точке* x_0 *слева*. Например, функция $\sqrt{x}$ непрерывна в нуле справа (рис. 29).

По аналогии с (37) определяются пределы

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{t \to 0+} f(1/t) \quad \text{и} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{t \to 0-} f(1/t). \qquad (40)$$

Все теоремы, доказанные о пределе функции (определение 7), сохраняются и для введенных пределов (37), (38), (39) и (40), так как в этих определениях-формулах справа стоит предел функции, введенный определением 7.

Отметим еще следующие формулы: при $n > 0$ и $a > 1$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{a^x} = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0, \quad \lim_{x \to 0+} x^n \ln x = 0. \qquad (41)$$

Если говорить описательным языком, то эти формулы показывают, что при больших $x > 0$ функция a^x значительно больше, чем x^n, а x^n значительно больше, чем $\ln x$.

Вторая формула (41) получается из первой, если сделать замену $t = \ln x$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = \lim_{t \to +\infty} \frac{t}{e^{nt}} = \lim_{t \to +\infty} \frac{t}{(e^n)^t} = 0,$$

так как $e^n > 1$. Третья формула (41) следует из второй после подстановки $x = 1/t$:

$$\lim_{x \to 0+} x^n \ln x = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t^n} \ln \frac{1}{t} = -\lim_{t \to +\infty} \frac{\ln t}{t^n} = 0.$$

Первая формула (41) будет доказана в § 2 гл. II.

ГЛАВА II

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Различные задачи естествознания — такие, как определение скорости, ускорения, силы тока, плотности вещества и многие другие — приводят к одним и тем же математическим вычислениям. Отвлекаясь от конкретного содержания каждой задачи, результат соответствующих математических вычислений называют производной. В этой главе изучается понятие производной и на примере некоторых задач показывается, как оно возникает и как при помощи производной и родственных понятий решаются задачи.

§ 1. Производная

Определение 10. *Производной* функции $y=f(x)$ *в точке* x_0 называется предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0). \qquad (1)$$

Очень удобна более короткая запись для этого предела и более короткое обозначение для производной

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'. \qquad (2)$$

Кроме обозначений $f'(x_0)$ и y', для производной еще приняты следующие обозначения: f', f'_x и y'_x; значок x внизу указывает на то, что y есть функция от x (в обозначении y' в отличие от обозначения $f'(x_0)$ это не ясно, и в задачах, где, кроме переменных x и y, фигурируют и другие переменные, — например, в случае, когда y есть сложная функция от x при промежуточной переменной t, — необходимо указать, функцией какой переменной считается y).

Перейдем теперь к вычислению производных основных элементарных функций и к решению задач, приводящих к понятию производной. Заметим только, что при выводе формул и практическом вычислении производных обычно пишут не x_0, а просто x, но при этом x считается *фиксированным*.

Примеры. 1. $y=f(x)=x^2$, тогда

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^2+2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x.$$

Коротко полученный результат записывается так: $(x^2)'=2x$.

2. $y=f(x)=\sin x$; тогда

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}\underset{(1)}{=}$$

$$\underset{(1)}{=}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\underset{(2)}{=}1\cdot\cos x=\cos x;$$

(1) по теореме 5, 3);

(2) в силу (24) гл. I и непрерывности косинуса (см. формулу (16) гл. I).

Таким образом, $(\sin x)'=\cos x$.

3. $(C)'=0$ (C — постоянная):

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{C-C}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}0=0.$$

4. $(x)'=1$:

$$(x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}1=1.$$

5. $(\ln x)'=1/x$:

$$(\ln x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(x+\Delta x)-\ln x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}\underset{(1)}{=}$$

$$\underset{(1)}{=}\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{xt}\underset{(2)}{=}\frac{1}{x}\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}\underset{(3)}{=}\frac{1}{x};$$

(1) делаем замену $t=\Delta x/x$ и учитываем, что $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta x/x=0$ (теорема 7);

(2) под знаком предела стоит функция от $t\ (t \to 0)$, а x зафиксировано — это постоянная, так что $1/x$ — постоянный множитель, и его можно вынести из-под знака предела (теорема 5,2));

(3) в силу (30) гл. I.

6. $(a^x)' = a^x \ln a$, в частности $(e^x)' = e^x$ ($\ln e = 1$, см. (28) гл. I):

$$(a^x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} \underset{(1)}{=} a^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \underset{(2)}{=} a^x \ln a;$$

(1) под знаком предела стоит функция от $\Delta x\ (\Delta x \to 0)$, а x зафиксировано, постоянно, поэтому a^x — тоже постоянная и выносится из-под знака предела (теорема 5,2));

(2) в силу (31) гл. I.

7. *Скорость есть производная от пути по времени, а производная от скорости по времени есть ускорение.* Пусть точка M движется по прямой. Путь s, который проходит эта точка, зависит от времени t, т. е. путь s есть функция от времени t: $s = s(t)$. Чтобы вычислить скорость v точки, надо взять два ее положения M и M_1 (рис. 30) в моменты времени t и $t + \Delta t$. Тогда $v \approx \Delta s/\Delta t$, причем это равенство тем точнее, чем короче промежуток времени Δt. В пределе же, при $\Delta t \to 0$, получим точное равенство

Рис. 30.

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta s/\Delta t = s_t'$$

(правая часть здесь написана в силу определения производной).

Чтобы подсчитать ускорение a, надо подсчитать изменение скорости v за единицу времени. Сама скорость v есть функция времени: $v = v(t)$. За промежуток времени от t до $t + \Delta t$ скорость изменилась на величину $\Delta v = v(t + \Delta t) - v(t)$ и потому $a \approx \Delta v/\Delta t$. Так же как и при вычислении скорости, это равенство переходит в точное, если перейти к пределу при $\Delta t \to 0$:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta v/\Delta t = v_t'.$$

8. *Угловой коэффициент касательной к графику функции равен производной этой функции, вычисленной в точке касания.* Прежде всего, надо дать определение касательной к произвольной линии. Касательная к линии есть предельное положение MT секущей MM_1, когда точка M_1 стремится по линии к точке M (рис. 31). Точка M называется точкой касания.

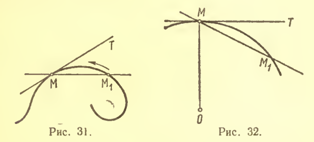


Рис. 31. Рис. 32.

Из школьного курса известно определение касательной к окружности. Теперь мы дали определение касательной к любой линии, в частности и для окружности. Таким образом, для окружности получилось два определения касательной — школьное и новое. Покажем, что они совпадают. Возьмем на окружности с центром в точке O точку M (рис. 32) и проведем $MT \perp OM$ (это — касательная к окружности в «школьном» определении). Проведем секущую MM_1. Угол $\angle TMM_1$ измеряется $\frac{1}{2}\,\breve{MM_1}$. При $M_1 \to M$ (по окружности) $\breve{MM_1} \to 0$ и потому угол $\angle TMM_1 \to 0$, а это и означает, что предельное положение MM_1 есть MT.

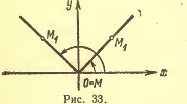


Рис. 33.

График функции $y = |x|$ (рис. 33) дает пример линии, не имеющей касательной в точке $M = 0$, соответствующей $x = 0$. Действительно, секущая MM_1 наклонена к оси Ox то под углом $\pi/4$ (правая часть), то под углом $3\pi/4$ (левая часть) и ни к какому предельному положению не стремится, когда точка M_1 стремится к точке M по этой линии.

Докажем теперь, что угловой коэффициент касательной (не параллельной оси Oy) к графику функции $y=f(x)$ равен значению производной в точке касания. Пусть точка касания будет $M(x_0; f(x_0))$. Возьмем на графике функции точку $M_1(x_0+\Delta x; f(x_0+\Delta x))$ и проведем секущую MM_1 и прямую $MC \parallel Ox$. Из рис. 34 ясно, что $M_1C = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$, $MC=\Delta x$, и угловой коэффициент секущей есть

$$\operatorname{tg}\angle M_1MC = \frac{M_1C}{MC} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Если у секущей имеется предельное положение MT — касательная, то

$$\lim_{M_1\to M}\angle M_1MC = \angle TMC = \alpha \neq \pi/2,$$

и потому в силу непрерывности тангенса для углового коэффициента касательной получаем

$$\operatorname{tg}\alpha = \lim_{M_1\to M}\operatorname{tg}(\angle M_1MC) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0),$$

так как при $M_1 \to M$ и $\Delta x \to 0$. Таким образом, если имеется касательная, то имеется и производная. Из ана-

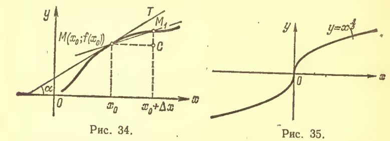


Рис. 34. Рис. 35.

логичных рассуждений следует и обратное: если есть производная, то есть и касательная.

Отметим следующие обстоятельства.

а) Если $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y/\Delta x=\infty$, то говорят, что $y'=\infty$. В этом случае касательная расположена вертикально. Например, для функции $y=\sqrt[3]{x}$ имеем $y'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\sqrt[3]{\Delta x}/\Delta x=\infty$, и график имеет вертикальную касательную, совпадающую

с осью Oy (рис. 35). Наглядно это можно себе представить так: $y' = \infty$, т. е. $\operatorname{tg} \alpha = \infty$, но тогда $\alpha = \pi/2$.

б) Из приведенных рассуждений видно, что функция $y = |x|$ при $x = 0$ производной не имеет (так как в этой точке нет касательной к графику функции).

в) Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x_0;\ f(x_0))$ имеет вид

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{3}$$

Действительно, координаты точки M удовлетворяют этому уравнению, так что точка M лежит на этой прямой. Кроме того, угловой коэффициент этой прямой равен $f'(x_0)$, т. е. равен угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$, проведенной в точке M. Поскольку через точку с заданным угловым коэффициентом (т. е. под заданным углом к оси Ox) можно провести единственную прямую, то прямая с уравнением (3) есть касательная.

Напишем для примера уравнение касательной к параболе $y = x^2$ в точке $x_0 = 3$: $f(x_0) = 3^2 = 9$; $(x^2)' = 2x$ (пример 1) и потому $f'(x_0) = 2x_0 = 6$. Следовательно, уравнение касательной будет $y = 9 + 6(x - 3)$, или $y = 6x - 9$.

9. *Производная — это скорость изменения функции.* Из определения производной (2) следует (в силу теоремы 13):

$$\Delta y / \Delta x = y' + \alpha, \tag{4}$$

где α — бесконечно малая при $\Delta x \to 0$. Отбросив α, получим приближенное равенство $\Delta y / \Delta x \approx y'$, из которого видно, что y' есть коэффициент пропорциональности между Δy и Δx. Если $y' = 2$, то Δy в 2 раза больше Δx; если $y' = 0{,}1$, то Δy в 10 раз меньше Δx (больше в 0,1 раза); если $y' = -3$, то Δy имеет знак, противоположный знаку Δx, и по модулю в 3 раза больше (т. е. с увеличением Δx уменьшается Δy). Это и имеется в виду, когда говорят, что производная — это скорость изменения функции.

Мы рассмотрели ряд задач из физики и геометрии, при решении которых появляется производная. Число подобных задач будет увеличиваться по мере изучения математики, физики и техники: всюду, где надо охарактеризовать скорость изменения функции, появляется производная.

Докажем ряд теорем о функциях, имеющих производные.

Теорема 14. *Если функция имеет производную, то она непрерывна.*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \Delta x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = y' \cdot 0 = 0,$$

что и требовалось доказать (гл. I, стр. 39).

Обратное утверждение неверно. Функция $y = |x|$ непрерывна при $x = 0$, но производной в этой точке не имеет.

Теорема 15 (правила вычисления производных). *Если функции* $u = u(x)$ *и* $v = v(x)$ *имеют производные, то*

I. $(u \pm v)' = u' \pm v'$;

II. $(uv)' = u'v + uv'$;

III. $(Cu)' = Cu'$ (C — *постоянная*);

IV. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

По определению производной, теореме 5 и формуле (35) гл. I имеем:

$$\text{I. } (u \pm v)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x+\Delta x) \pm v(x+\Delta x)] - [u(x) \pm v(x)]}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} \pm \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x}\right] =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} =$$
$$= u' \pm v'.$$

$$\text{II. } (uv)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)\, v(x+\Delta x) - u(x)\, v(x)}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(u+\Delta u)(v+\Delta v) - uv}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{uv + \Delta u \cdot v + u \cdot \Delta v + \Delta u \cdot \Delta v - uv}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[v \frac{\Delta u}{\Delta x} + u \frac{\Delta v}{\Delta x} + \Delta u \frac{\Delta u}{\Delta x}\right] =$$
$$= v \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + u \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta v \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} =$$
$$= v \cdot u' + u \cdot v' + 0 \cdot u' = u'v + uv',$$

так как множители u и v не зависят от Δx и являются

постоянными, а $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta v = 0$, поскольку v имеет производную и потому непрерывна (теорема 14).

III. $(Cu)' = (C')\,u + Cu' = 0 \cdot u + Cu' = Cu'$ (так как $C' = 0$).

IV. $$\left(\frac{u}{v}\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \dfrac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)\,v(x) - u(x)\,v(x+\Delta x)}{\Delta x \cdot v(x+\Delta x)\,v(x)} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(u+\Delta u)\,v - u\,(v+\Delta v)}{\Delta x \cdot v\,(v+\Delta v)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{uv + \Delta u \cdot v - uv - u \cdot \Delta v}{\Delta x \cdot v\,(v+\Delta v)} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{\Delta u}{\Delta x} v - \dfrac{\Delta v}{\Delta x} u}{v^2 + v \cdot \Delta v} = \frac{u'v - uv'}{v^2},$$

как и при доказательстве правила II.

Теорема 16 (производная сложной функции). *Пусть функции $y = f(t)$ и $t = g(x)$ имеют производные. Тогда сложная функция $y = f(g(x))$ имеет производную и*

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x.$$

Вычислим производную функции $y = f(g(x)) = F(x)$:

$$y'_x = F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} \underset{(1)}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \underset{(2)}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \left[y'_t \frac{\Delta t}{\Delta x} + \alpha(\Delta t) \frac{\Delta t}{\Delta x} \right] \underset{(3)}{=}$$
$$\underset{(3)}{=} y'_t \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta t}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta t) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta t}{\Delta x} \underset{(4)}{=}$$
$$\underset{(4)}{=} y'_t \cdot t'_x + \alpha\left(\lim_{\Delta x \to 0} \Delta t\right) t'_x \underset{(5)}{=} y'_t \cdot t'_x.$$

(1) Как вычисляются $F(x+\Delta x)$ и $F(x)$ через значения функций f и g? Сначала находим $t = g(x)$ и $F(x) = f(t)$ по определению сложной функции. Далее, положив, как обычно (гл. I, (34)), $\Delta t = g(x+\Delta x) - g(x)$, так что $g(x+\Delta x) = t + \Delta t$, получаем (как и выше) $F(x+\Delta x) = f(t+\Delta t)$, т. е. $F(x+\Delta x) - F(x) = f(t+\Delta t) - f(t) = \Delta f$.

(2) По условию теоремы существует производная $f'(t) = y'_t$, и потому в силу (4) $\Delta f = y'_t \Delta t + \alpha(\Delta t) \cdot \Delta t$, где $\alpha(\Delta t)$ — бесконечно малая функция при $\Delta t \to 0$,

т. е. $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \alpha(\Delta t) = 0$, но не определенная при $\Delta t = 0$. Доопределим ее при $\Delta t = 0$, положив $\alpha(0) = 0$, получим непрерывную при $\Delta t = 0$ функцию.

(3) В силу теоремы 5 и того, что y'_t — постоянный множитель (не зависит от Δt).

(4) По условию теоремы существует производная $g'(x) = t'_x$ (формула (2)), а функция $\alpha(\Delta t)$ непрерывна при $\Delta t = 0$ (см. объяснение (2)) и можно применить теорему 6.

(5) В силу существования t'_x и теоремы 14: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta t = 0$.

Примеры. 1. $(\cos x)' = -\sin x$. Рассмотрим $y = \cos x = \sin((\pi/2) - x)$ как сложную функцию: $y = \sin t$, $t = (\pi/2) - x$. Тогда $y'_t = \cos t$ (пример 2) и $t'_x = ((\pi/2) - x)' = (\pi/2)' - (x)' = 0 - 1 = -1$. Следовательно, $(\cos x)' = y'_x = y'_t \cdot t'_x = \cos t \cdot (-1) = -\cos((\pi/2) - x) = -\sin x$.

2. $(\operatorname{tg} x)' = 1/\cos^2 x$. По теореме 15,IV имеем

$$\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

3. $(\operatorname{ctg} x)' = -1/\sin^2 x$; выводится аналогично.

4. $(x^p)' = px^{p-1}$ (p — любое действительное число). Рассмотрим $y = x^p = e^{p \ln x}$ как сложную функцию: $y = e^t$, $t = p \ln x$. Тогда $y'_t = e^t$ (пример 6) и $t'_x = p/x$ (пример 5 и теорема 15,III). Следовательно,

$$(x^p)' = y'_x = y'_t \cdot t'_x = e^t \cdot p/x = x^p \cdot p/x = px^{p-1}.$$

Это доказательство проведено для $x > 0$. Если x^p определено и для $x < 0$, то формула сохраняется в силу четности или нечетности степенной функции (см. приложение, стр. 141). Сохраняется формула и при $x = 0$.

Теорема 17 (производная обратной функции). *Если функция $g(x)$ — обратная к $f(x)$ и существует $f'(x)$, то*

$$g'(x) = 1/f'(g(x)).$$

Так как $f(g(x)) = x$ для всех x, то, беря производные от обеих частей этого равенства (теорема 16), получаем

$$f'(g(x)) \cdot g'(x) = 1, \text{ откуда } g'(x) = 1/f'(g(x)).$$

Примеры. 1. $(\operatorname{arctg} x)' = 1/(1+x^2)$. Функция $g(x) = \operatorname{arctg} x$ — обратная к $f(x) = \operatorname{tg} x$, $f'(x) = 1/\cos^2 x$, поэтому

$$(\operatorname{arctg} x)' = g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{1/\cos^2(g(x))} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(g(x))} = \frac{1}{1+x^2}.$$

2. $(\arcsin x)' = 1/\sqrt{1-x^2}$. Функция $g(x) = \arcsin x$ — обратная к $f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$, поэтому

$$(\arcsin x)' = g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{\cos(g(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(g(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

причем перед корнем берем знак плюс, так как $-\pi/2 \leqslant \arcsin x = g(x) \leqslant \pi/2$, и потому $\cos(g(x)) \geqslant 0$.

3. Производные $(\arccos x)' = -1/\sqrt{1-x^2}$ и $(\operatorname{arcctg} x)' = -1/(1+x^2)$ вычисляются аналогично.

Все производные основных элементарных функций, выведенные выше, составляют таблицу основных производных:

I. $(C)' = 0$,	VIII. $(\cos x)' = -\sin x$,
II. $(x^p)' = px^{p-1}$,	IX. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$,
III. $(x)' = 1$,	X. $(\operatorname{ctg} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$,
IV. $(a^x)' = a^x \ln a$,	XI. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
V. $(e^x)' = e^x$,	XII. $(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$,
VI. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$,	XIII. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$,
VII. $(\sin x)' = \cos x$,	XIV. $(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{-1}{1+x^2}$.

Пользуясь этой таблицей и теоремами 15 и 16, вычисляют производные более сложных функций.

Производная $f'(x)$ в свою очередь есть функция от x. Может оказаться, что эта функция имеет производную; эта производная называется второй производной от функции $y = f(x)$ и обозначается $f''(x)$ или y'', так что

$$f''(x) = (f'(x))' \quad \text{или} \quad y'' = (y')'.$$

Например, если $y = x^5$, то $y' = 5x^4$, а $y'' = (5x^4)' = 5(x^4)' = 5 \cdot 4x^3 = 20x^3$. Если рассматривать путь s движущейся точки как функцию от времени t, т. е. $s = s(t)$ (как в примере 7), то $s''(t)$ есть ускорение. Действительно, так как $s'(t) = v$ и $v'(t) = a$ (пример 7), то $s''(t) = (s'(t))' = (v(t))' = v'(t) = a$.

Вторая производная тоже есть функция от x. Если эта функция имеет производную, то она называется третьей производной от функции $y = f(x)$ и обозначается $f'''(x)$ или y''', так что

$$f'''(x) = (f''(x))' \quad \text{или} \quad y''' = (y'')'.$$

Например, если $y = x^5$, то $y'' = 20x^3$ и $y''' = (20x^3)' = 20(x^3)' = 20 \cdot 3x^2 = 60x^2$.

Продолжая этот процесс, мы последовательно будем получать производные: четвертую $f^{IV}(x)$, или y^{IV}, пятую $f^{V}(x)$, или y^{V}, сотую $f^{(100)}(x)$, или $y^{(100)}$, и так далее. Этот процесс может быть описан следующим образом: первая производная $f'(x)$ функции $y = f(x)$ определена равенством (1); если уже определена n-я производная $f^{(n)}(x)$, то $(n+1)$-я производная $f^{(n+1)}(x)$ определяется равенством

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)}(x))', \quad \text{или} \quad y^{(n+1)} = (y^{(n)})'. \tag{5}$$

Например, для функции $y = x^5$ последовательно получаем

$$y^{IV} = (y''')' = (60x^2)' = 60(x^2)' = 60 \cdot 2x = 120x,$$
$$y^{V} = (y^{IV})' = (120x)' = 120(x)' = 120 \cdot 1 = 120,$$
$$y^{VI} = (y^{V})' = (120)' = 0.$$

Ясно, что все следующие производные тоже равны нулю.

Для функции $y = e^x$ имеем $y' = e^x$, $y'' = e^x$, и при любом n будет, очевидно,

$$y^{(n)} = (e^x)^{(n)} = e^x.$$

Для функции $y = \cos x$

$$y' = -\sin x, \quad y'' = -\cos x, \quad y''' = \sin x, \quad y^{IV} = \cos x,$$

и далее все опять повторяется. Заметив это, легко сообразить, чему равна $y^{(n)}$ для любого n, например: $y^{(235)} = y''' = \sin x$, так как $235 = 4 \cdot 58 + 3$, а $y^{(4 \cdot 58)} = \cos x$.

Все производные, начиная со второй, называются *старшими производными*, или *производными высших порядков*. Производная $f'(x)$ называется *первой производной*.

§ 2. Исследование функций

В этом параграфе будет показано, как при помощи производных решается следующая задача: задана функция, найти основные особенности поведения этой функции, будут даны правила для отыскания точек экстремума, интервалов монотонности и выпуклости заданной функции.

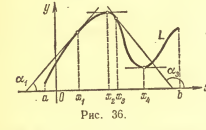


Рис. 36.

Прежде чем переходить к точным доказательствам, поясним на простейшем примере эти правила. На рис. 36 нарисован график L функции $y=f(x)$, всюду имеющей производную. В точке x_1 касательная к L и ось Ox образуют острый угол α_1; поэтому ее угловой коэффициент, равный $\operatorname{tg}\alpha_1$, положителен. Но в примере 8 мы видели, что $f'(x_1)=\operatorname{tg}\alpha_1$. Следовательно, $f'(x_1)>0$. И так будет в любой точке интервала $(a;\ x_2)$, где функция $f(x)$ монотонно возрастает. Сразу напрашивается вывод: если на интервале $y'>0$, то на этом интервале функция монотонно возрастает. Это правило, подмеченное на простом графике, потом будет доказано строго, без ссылок на наглядные представления и чертежи, в самом общем случае.

Далее, в точке x_3 касательная к L образует с осью Ox тупой угол α_3; поэтому ее угловой коэффициент, равный $\operatorname{tg}\alpha_3$, отрицателен. А так как $f'(x_3)=\operatorname{tg}\alpha_3$, то $f'(x_3)<0$. Опять-таки напрашивается вывод: если на интервале $y'<0$, то на этом интервале функция монотонно убывает.

В точке x_2 функция имеет максимум. Из чертежа ясно, что в x_2 касательная к L параллельна оси Ox, и потому ее угловой коэффициент равен нулю, так что $f'(x_2)=0$. При этом слева от этой точки $y'>0$, а справа $y'<0$.

В точке x_4 у функции минимум и тоже $f'(x_4)=0$. Кроме того, слева от этой точки $y'<0$, а справа $y'>0$.

Эти простые и наглядные соображения, ясно видные на простом примере, сохраняются и в общем случае и будут доказаны ниже. Для этого нам потребуется формула Лагранжа. Так как ее доказательство слишком сложно (см. приложение), то ограничимся только формулировкой.

Теорема 18 (формула Лагранжа). *Если функция f имеет производную на $(a; b)$, $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = f(a)$ и $\lim\limits_{x \to b-} f(x) = f(b)$, то можно указать такую точку c, $a < c < b$, что*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \quad (6)$$

Условия теоремы в точке a будут выполнены, если существует $f'(a)$ или функция f непрерывна в точке a. Аналогичное замечание относится и к точке b. Условие, что функция имеет производную в интервале $(a; b)$, означает, что для всех x, $a < x < b$, эта функция имеет производную (конечную).

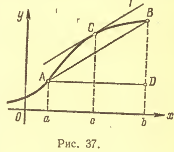


Рис. 37.

Формула Лагранжа имеет простой геометрический смысл: на дуге $\breve{AB}$ (в каждой точке которой имеется касательная) найдется точка C такая, что касательная CT, проведенная в этой точке C к дуге $\breve{AB}$, параллельна хорде AB (рис. 37). Действительно, возьмем на дуге $\breve{AB}$ графика функции $y = f(x)$ точку $C(c; f(c))$, где c — точка из формулы (6). Тогда $k_{AB} = \frac{BD}{AD} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ и $k_{CT} = f'(c)$ (пример 8 на стр. 46). Разделив обе части формулы (6) на $b - a$, получим, что $k_{AB} = k_{CT}$, т. е. $AB \parallel CT$.

Теорема 19 (достаточный признак монотонности).

1) *Если $f'(x) > 0$ на $(a; b)$, то f монотонно возрастает на $(a; b)$;*

2) *если $f'(x) < 0$ на $(a; b)$, то f монотонно убывает на $(a; b)$.*

Возьмем любые числа x_1 и x_2, $x_1 < x_2$, из интервала $(a; b)$. По формуле (6) (ее можно применять, так как f' существует на $[x_1; x_2]$) $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$, $x_1 < c < x_2$, и поэтому c принадлежит интервалу $(a; b)$. Так как $x_2 - x_1 > 0$, то в первом случае $f(x_2) - f(x_1) > 0$, т. е. $f(x_2) > f(x_1)$, а во втором $f(x_2) - f(x_1) < 0$, т. е. $f(x_2) < f(x_1)$, что и требовалось доказать (см. определение 4).

Теорема 20 (необходимый признак экстремума). *Если в точке экстремума существует производная, то она равна нулю.*

Пусть x_0 — точка максимума, и пусть существует

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

в силу теоремы 13. У этой дроби числитель $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ меньше нуля. Поэтому для $\Delta x>0$ будет $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}<0$ и по теореме 10 $f'(x_0)\leqslant 0$. С другой стороны, в силу теоремы 13

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

и поскольку для $\Delta x<0$ будет $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}>0$, то по теореме 10 $f'(x_0)\geqslant 0$. Следовательно, $f'(x_0)=0$.

Если x_0 — точка минимума, то рассуждения аналогичны.

Таким образом, точки экстремума функции надо искать только там, где $f'=0$ или f' не существует (например, функция $y=|x|$ в точке $x_0=0$ имеет минимум, а производной в этой точке не существует). Однако надо иметь в виду, что там, где $y'=0$, экстремума может и не быть. Например, функция $y=x^3$ имеет производную $y'=3x^2$, равную нулю при $x_0=0$, но экстремума в этой точке не имеет (рис. 38). Для того чтобы выяснить, есть ли в данной точке экстремум и будет ли это максимум или минимум, докажем следующую теорему:

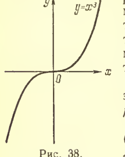


Рис. 38.

Теорема 21 (достаточный признак экстремума). *Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0,*

1) *если $f'<0$ на $(a;\ x_0)$ и $f'>0$ на $(x_0;\ b)$, то в точке x_0 функция $f(x)$ имеет минимум;*

2) *если $f'>0$ на $(a;\ x_0)$ и $f'<0$ на $(x_0;\ b)$, то в точке x_0 функция $f(x)$ имеет максимум.*

Коротко эту теорему формулируют так: если в точке x_0 производная меняет знак с минуса на плюс, то x_0 — точка минимума; если в точке x_0 производная меняет знак с плюса на минус, то точка x_0 — точка максимума.

Пусть $x \neq x_0$ — любая точка из интервала $(a;\ b)$. По формуле Лагранжа между точкой x и x_0 можно найти такую точку c, что

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0).$$

Покажем, что в первом случае правая часть этого равенства положительна. Действительно, если $a < x < x_0$ (т. е. $x - x_0 < 0$), то $a < c < x_0$ (рис. 39) и $f'(c) < 0$ по условию теоремы, а потому $f'(c)(x - x_0) > 0$. Если же $x_0 < x < b$ (т. е. $x - x_0 > 0$), то $x_0 < c < b$ (рис. 40) и $f'(c) > 0$ по условию теоремы, а потому произведение $f'(c)(x - x_0) > 0$. Таким образом, для любого $x \neq x_0$ из интервала $(a;\ b)$ будет $f(x) - f(x_0) > 0$, или $f(x) > f(x_0)$, что и требовалось доказать (см. определение 5). Второй случай разбирается аналогично.

Построим, например, график функции $y = \sqrt[3]{x^2}(5 - x)$. Она непрерывна, $y = 0$ при $x = 0$ и $x = 5$; $y' = 5 \cdot \frac{2}{3} x^{-1/3} - \frac{5}{3} x^{2/3} = \frac{5}{3\sqrt[3]{x}}(2 - x)$ и $y' = \infty$ при $x = 0$ (не существует конечной производной), $y' = 0$ при $x = 2$. На интервалах $(-\infty;\ 0)$ и $(2;\ +\infty)$ будет $y' < 0$, следовательно, там функция монотонно убывает; на интервале $(0;\ 2)$ будет $y' > 0$ — функция монотонно возрастает. Это полезно изобразить на «схеме знаков y'» (рис. 41). Из предыдущего видно, что y' в точке $x = 0$ меняет знак с минуса на плюс,

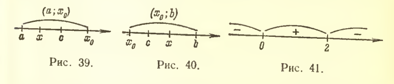


Рис. 39. Рис. 40. Рис. 41.

т. е. при $x = 0$ функция имеет минимум, а в точке $x = 2$ меняет знак с плюса на минус, т. е. там функция имеет максимум. При построении надо вычислить $y(0) = 0$, $y(2) = 3\sqrt[3]{4} \approx 4{,}8$ и учесть, что $y'(0) = \infty$, т. е. график функции должен касаться оси ординат (рис. 42).

И вот теперь докажем первую формулу (41) гл. I. Для этого рассмотрим положительную при $x > 0$ функцию

$$y = x^{n+1}/a^x = x^{n+1}a^{-x}.$$

Исследуем ее на экстремум: $y' = x^n a^{-x}((n+1) - x\ln a)$. Отсюда видно, что на интервале $(0;\ (n+1)/\ln a)$ функция монотонно возрастает, а на интервале $((n+1)/\ln a;\ +\infty)$ — монотонно убывает. В точке $x = (n+1)/\ln a$ эта функция, следовательно, имеет наибольшее значение, пусть это будет число M. Таким образом, для всех $x > 0$ будет

$$0 < x^{n+1}/a^x \leqslant M, \quad \text{откуда} \quad 0 < x^n/a^x \leqslant M/x.$$

Из последнего неравенства в силу теоремы 9 и того, что $\lim\limits_{x\to\infty} 1/x = 0$, следует формула (41) гл. I.

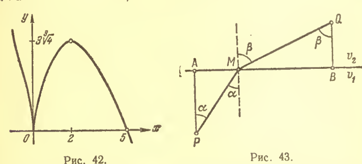


Рис. 42. Рис. 43.

Рассмотрим еще физическую задачу. Пусть точка движется из P в Q (рис. 43) так, что в нижней полуплоскости ее скорость постоянна и равна v_1, а в верхней равна v_2. Спрашивается: каким должен быть путь точки, чтобы на весь путь затратить минимум времени.

При $v_1 = v_2$ искомый путь есть прямая PQ. При $v_1 \neq v_2$ это — ломаная PMQ, и положение M надо определить так, чтобы на путь PMQ было затрачено минимальное время.

Пусть $AB = l$, $QB \perp AB$ и $QB = b$, $PA \perp AB$ и $PA = a$, $AM = x$ (рис. 43). Тогда время, затраченное на путь PMQ,

$$t = \frac{PM}{v_1} + \frac{QM}{v_2} = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2+(l-x)^2}}{v_2}$$

есть функция от x, и надо найти минимум этой функции. В точке минимума должно быть

$$t'_x = \frac{1}{v_1}\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{1}{v_2}\frac{l-x}{\sqrt{b^2+(l-x)^2}} = 0.$$

Имеет ли это уравнение решение и дает ли это решение

минимум рассматриваемой функции $t(x)$? Легко подсчитать, что $t'' > 0$, т. е. функция $t'(x)$ монотонно возрастает (теорема 19). А так как $t'(0) < 0$, а $t'(l) > 0$, то существует такое x_0, $0 < x_0 < l$, что $t'(x_0) = 0$ (см. приложение, теорема 5). При этом $t' < 0$ на $(0;\ x_0)$ и $t' > 0$ на $(x_0;\ l)$, т. е. точка x_0 есть точка минимума (теорема 21). Точка x_0 находится из уравнения приближенными методами.

Заметим, что в точке минимума x_0 уравнение можно переписать в виде

$$\frac{x_0}{\sqrt{a^2+x_0^2}} : \frac{l-x_0}{\sqrt{b^2-(l-x_0)^2}} = \frac{v_1}{v_2}.$$

Кроме того (см. рис. 43)

$$\frac{x_0}{\sqrt{a^2+x_0^2}} = \frac{AM}{PM} = \sin\alpha, \qquad \frac{l-x_0}{\sqrt{b^2+(l-x_0)^2}} = \frac{MB}{MQ} = \sin\beta,$$

так что в точке минимума

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2}.$$

Это, как легко видеть, то же условие, что и для преломления света при переходе из одной среды в другую (на рис. 43 пунктир в точке M перпендикулярен AB и α — угол падения, а β — угол преломления). Таким образом, мы приходим еще и к следующему выводу: свет движется по такому пути, что время движения минимально.

Теорема 22 (признак постоянства функции). *Для того чтобы функция была постоянной на $(a;\ b)$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$f'(x) = 0 \text{ на } (a;\ b).$$

Если $f(x) = C$, то $f'(x) = (C)' = 0$. Обратно, пусть $f'(x) = 0$ для всех x на $(a;\ b)$. Зафиксируем x_0, тогда для всех x из $(a;\ b)$ по формуле Лагранжа имеем (c находится между x и x_0 и потому принадлежит $(a;\ b)$)

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0) = 0,$$

откуда $f(x) = f(x_0) = C$.

Таким образом, при помощи первой производной можно найти интервалы монотонности и постоянства для заданной функции и точки экстремума (а также определить, где максимум, а где минимум).

В ряде случаев полезно более детальное исследование функции — эти вопросы связаны со второй производной. Терминология здесь принята следующая: если на интервале $(a;\ b)$ график функции расположен выше любой своей

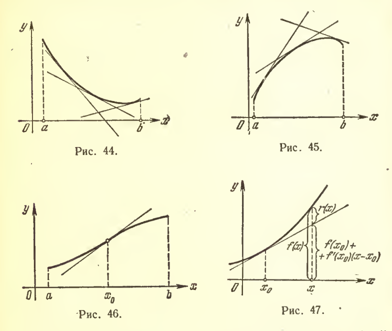


Рис. 44. Рис. 45. Рис. 46. Рис. 47.

касательной, то функция называется *выпуклой вниз* на $(a;\ b)$ (рис. 44); если на интервале $(a;\ b)$ график функции расположен ниже любой своей касательной, то функция называется *выпуклой вверх* на $(a;\ b)$ (рис. 45); точка x_0 называется точкой *перегиба*, если график функции имеет касательную в этой точке, а на интервалах $(a;\ x_0)$ и $(x_0;\ b)$ функция выпукла — на одном вверх, а на другом вниз (рис. 46).

Теорема 23 (достаточный признак выпуклости). *Если* $f''(x) > 0$ *на интервале* $(a;\ b)$, *то функция* $f(x)$ *выпукла вниз на* $(a;\ b)$; *если* $f''(x) < 0$ *на* $(a;\ b)$, *то функция* $f(x)$ *выпукла вверх на* $(a;\ b)$.

Пусть x_0 — любая точка из интервала $(a;\ b)$. Уравнение касательной, проведенной в этой точке к графику функ-

ции $f(x)$, имеет вид (см. формулу (3))

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Рассмотрим разность между ординатами точек на касательной и на графике при одном и том же x (рис. 47):

$$r(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) =$$

$$\underset{(1)}{=} f'(c_1)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0) \underset{(2)}{=} (x - x_0)(c_1 - x_0) f''(c).$$

(1) В силу (6) $f(x) - f(x_0) = (x - x_0) f'(c_1)$, где c_1 между точками x и x_0 (рис. 48 и 49); формулой Лагранжа можно пользоваться, так как на большем интервале $(a;\ b)$ существует производная (поскольку существует f'');

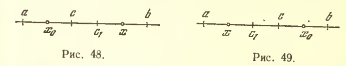


Рис. 48. Рис. 49.

(2) в силу (6) $f'(c_1) - f'(x_0) = f''(c)(c_1 - x_0)$, где c между точками c_1 и x_0; формулой Лагранжа для функции $f'(x)$ можно пользоваться, так как на большем интервале $(a;\ b)$ у нее есть производная $(f'(x))' = f''(x)$.

Поскольку $(x - x_0)(c_1 - x_0) > 0$ и при $x > x_0$ и при $x < x_0$ (см. рис. 48, 49), то знак разности $r(x)$ совпадает со знаком $f''(c)$. Если $f'' > 0$ на $(a;\ b)$, то $r > 0$, т. е. график расположен выше касательной (см. рис. 47), а так как это произвольная касательная, то функция выпукла вниз на $(a;\ b)$. Если $f'' < 0$, то $r < 0$, и график расположен ниже касательной, а так как это произвольная касательная, то функция выпукла вверх на $(a;\ b)$.

Построим, например, график функции $y = e^{-x^2}$. Это — непрерывная, четная функция, определенная всюду и всюду бóльшая нуля, $\lim\limits_{x \to \infty} y = 0$. Находим $y' = -2xe^{-x^2}$; $y' > 0$ на $(-\infty;\ 0)$ — здесь функция монотонно возрастает, $y' < 0$ на $(0;\ +\infty)$ — здесь функция монотонно убывает, в точке $x = 0$ y' меняет знак с плюса на минус, т. е. 0 — точка максимума и $y(0) = 1$.

Далее, $y'' = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1)$; $y'' < 0$ на $(-1/\sqrt{2};\ 1/\sqrt{2})$ — здесь функция выпукла вверх, $y'' > 0$ на $(-\infty;\ -1/\sqrt{2})$ и $(1/\sqrt{2};\ +\infty)$ — здесь функция выпукла вниз,

$x = \pm 1/\sqrt{2}$ — точки перегиба, там $y = e^{-1/2} \approx 0{,}6$ и $y'(1/\sqrt{2}) = -\sqrt{2}e^{-1/2} \approx -0{,}8$ (рис. 50).

Построим еще график функции $y = x^2 \ln x$. Эта функция определена и непрерывна при всех $x > 0$; $y = 0$ при $x = 1$; $\lim\limits_{x\to\infty} y = \infty$ и $\lim\limits_{x\to 0} y = 0$ (в силу (41) гл. I). Далее, $y' = 2x \ln x + x$; отсюда следует, что $y' > 0$ на интервале $(e^{-1/2}; +\infty)$ — здесь функция монотонно возрастает, и $y' < 0$

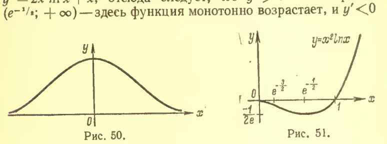
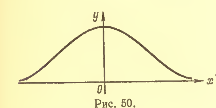



Рис. 50.

Рис. 51.

на интервале $(0; e^{-1/2})$ — здесь функция монотонно убывает, а точка $x = e^{-1/2} \approx 0{,}6$ есть, следовательно, точка минимума;

$$y(e^{-1/2}) = (e^{-1/2})^2 \ln(e^{-1/2}) = -1/2e \approx -0{,}2.$$

Вторая производная $y'' = 2\ln x + 3$; $y'' > 0$ на интервале $(e^{-3/2}; +\infty)$ — здесь график выпуклый вниз, и $y'' < 0$ на интервале $(0; e^{-3/2})$ — здесь график выпуклый вверх; точка $x = e^{-3/2} \approx 0{,}2$ есть точка перегиба, $y(e^{-3/2}) = -\frac{3}{2}e^{-3} \approx$ $\approx -0{,}08$ и $y'(e^{-3/2}) = -2e^{-3/2} \approx -0{,}45$. Кроме того, для построения графика следует заметить, что $\lim\limits_{x\to 0+} y' = 0$ (в силу (41) гл. I), т. е. график рисовать надо так, чтобы он «подходил к началу координат, касаясь оси абсцисс» (рис. 51).

§ 3. Дифференциал функции

Наряду с производной, особенно в интегральном исчислении и его приложениях (см. гл. III и IV), большую роль играет дифференциал функции.

Определение 11. *Дифференциалом* dy функции $y = f(x)$ называется главная, линейная относительно Δx, часть приращения функции.

Это означает следующее: если приращение функции представлено в виде

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + \alpha\Delta x, \tag{7}$$

где A не зависит от Δx, а α есть бесконечно малая при $\Delta x \to 0$, то $A \cdot \Delta x$ называется дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x_0:

$$dy = A\Delta x; \tag{8}$$

при этом сама функция называется *дифференцируемой* в точке x_0. Для независимой переменной полагают ее дифференциал $dx = \Delta x$.

Рассмотрим пример: вычислить дифференциал функции $y = x^3$ в точке x_0. Приращение функции $\Delta y = (x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3 = x_0^3 + 3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x_0^3 = 3x_0^2\Delta x + (3x_0\Delta x + (\Delta x)^2)\Delta x$. Таким образом, мы получили разложение вида (7) с $A = 3x_0^2$, не зависящим от Δx, и $\alpha = 3x_0 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$; причем α есть, очевидно, бесконечно малая при $\Delta x \to 0$. Следовательно, функция $y = x^3$ дифференцируема в точке x_0, а ее дифференциал в этой точке $dy = 3x_0^2 dx$.

Так же как и для производной, обычно вместо x_0 пишут x. Для предыдущего примера это выглядит так:

$$dy = d(x^3) = 3x^2\, dx.$$

Оказывается, что дифференциал функции тесно связан с производной этой же функции: имеет место следующая

Теорема 24. *Для того чтобы функция имела дифференциал, необходимо и достаточно, чтобы она имела производную. При этом*

$$dy = y'_x\, dx. \tag{9}$$

Необходимость: пусть функция имеет дифференциал; тогда имеет место разложение (7) и

$$y'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{A\Delta x + \alpha\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (A + \alpha) = A,$$

так что y'_x существует. Равенство (9) следует теперь из (8), так как $dx = \Delta x$.

Достаточность: пусть функция имеет производную y'_x; тогда имеет место равенство (4), откуда после умножения на Δx получаем равенство (7) с $A = y'_x$. Отсюда в силу формулы (8) получаем формулу (9).

Подчеркнем еще одно следствие из формулы (9): деля обе части формулы (9) на dx, получаем

$$y'_x = \frac{dy}{dx}, \tag{10}$$

т. е. производная равна частному от деления дифференциала функции на дифференциал аргумента.

В силу теоремы 24 все правила вычисления дифференциалов очень похожи на соответствующие правила для вычисления производных. Эти правила даются следующей теоремой:

Теорема 25 (правила вычисления дифференциалов). *Если функции* $u = u(x)$ *и* $v = v(x)$ *дифференцируемы, то*

1) $d(u \pm v) = du \pm dv$;
2) $d(uv) = u\,dv + v\,du$;
3) $d(Cu) = C\,du$ (C — постоянная);
4) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$.

Все правила доказываются одинаково — при помощи формулы (9) и теоремы 15. Докажем, например, второе правило:

$$d(uv) = (uv)'_x\,dx = (uv'_x + vu'_x)\,dx = \\ = u\,(v'_x\,dx) + v\,(u'_x\,dx) = u\,dv + v\,du.$$

Формула (9) была выведена в предположении, что x — независимая переменная, так как полагалось $\Delta x = dx$. Если же x есть функция, то $\Delta x \neq dx$, однако формула (9) сохраняется неизменной. Об этом говорит следующая теорема:

Теорема 26 (инвариантность первого дифференциала). *Формула* (9) *сохраняется, если* x *есть функция.*

Пусть $y = f(x)$, а $x = g(t)$, где t — независимая переменная. Тогда y есть сложная функция от независимой переменной t, и

$$dy = y'_t\,dt.$$

Но так как по теореме 16

$$y'_t = y'_x \cdot x'_t,$$

а по теореме 24

$$x'_t\,dt = dx,$$

то

$$dy = y'_t dt = y'_x x'_t dt = y'_x (x'_t dt) = y'_x dx,$$

что и требовалось доказать.

Ввиду особой важности этого факта подчеркнем еще раз: формула (9) имеет место во всех случаях, т. е. и когда x — независимая переменная, и когда x — функция.

Теорема 27 (геометрический смысл дифференциала функции). *Дифференциал функции есть приращение ординаты касательной, проведенной к графику этой функции.*

Проведем в точке M касательную MT к графику функции $y = f(x)$ и $MC \parallel Ox$ (рис. 52). Тогда $MC = dx$, $\operatorname{tg}(\angle TMC) = y'$, а из $\triangle MTC$ имеем, что приращение ординаты касательной

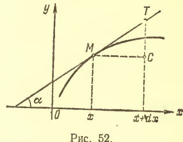


Рис. 52.

$$TC = MC \cdot \operatorname{tg}(\angle TMC) = dx \cdot y' = dy.$$

В качестве приложений понятия дифференциала рассмотрим приближенные вычисления. Пусть, например, требуется приближенно подсчитать

$$A = \frac{\sqrt[3]{8{,}06}}{5 - \sqrt[7]{(0{,}93)^2}}.$$

Если написать, что

$$A \approx \frac{\sqrt[3]{8}}{5 - \sqrt[7]{1^2}} = \frac{2}{5-1} = \frac{1}{2},$$

то при этом будет допущена ошибка

$$\delta = A - \frac{1}{2}.$$

Оказывается, что при помощи дифференциала можно надежно оценить величину этой ошибки δ. Для этого можно поступить следующим образом. Если в формуле (7) отбросить второе слагаемое $\alpha \cdot \Delta x$, то получим приближенное равенство

$$\Delta y \approx dy, \tag{11}$$

основу всех приближенных вычислений (в простейших случаях). Далее рассмотрим дифференцируемые функции $u=u(x)$ и $v=v(x)$ такие, что $u(x_0)=8$, $u(x_0+dx)=8{,}06$, $v(x_0+dx)=0{,}93$, $v(x_0)=1$ (например, можно взять u и v линейными функциями). Тогда число A, которое нам надо подсчитать, есть значение функции

$$y=\frac{\sqrt[3]{u}}{5-\sqrt[7]{v^2}}$$

при аргументе, равном x_0+dx, а мы подсчитали значение этой функции при аргументе, равном x_0. Стало быть, интересующая нас ошибка

$$\delta=\Delta y\approx dy=\frac{1}{3}u^{-2/3}\,du\,(5-v^{2/7})^{-1}+$$
$$+u^{1/3}(5-v^{2/7})^{-2}\frac{2}{7}v^{-5/7}\,dv,$$

где

$$du\approx\Delta u=u(x_0+dx)-u(x_0)=8{,}06-8=0{,}06,$$
$$dv\approx\Delta v=v(x_0+dx)-v(x_0)=0{,}93-1=-0{,}07,$$

так что

$$\delta\approx\frac{1}{3}\cdot 8^{-2/3}\cdot 0{,}06\cdot(5-1^{2/7})^{-1}+$$
$$+8^{1/3}\cdot(5-1^{2/7})^{-2}\cdot\frac{2}{7}\cdot 1^{-5/7}\cdot(-0{,}07)\approx-0{,}001.$$

При этом даже видно, что $A\approx 1/2$ с избытком.

Формулой (11) можно воспользоваться и по-другому. Вспомнив, что $\Delta y=f(x_0+dx)-f(x_0)$, а $dy=f'(x_0)\,dx$, перепишем формулу (11) в таком виде:

$$f(x_0+dx)\approx f(x_0)+f'(x_0)\,dx. \qquad (12)$$

Это тоже одна из основных формул для приближенных подсчетов. Например, пусть требуется подсчитать приближенно $\sqrt[10]{1000}$. Заметим, что

$$\sqrt[10]{1000}=\sqrt[10]{2^{10}-24}=2\sqrt[10]{1-24\cdot 2^{-10}}=2\sqrt[10]{1-3\cdot 2^{-7}}.$$

Возьмем $f(x)=\sqrt[10]{x}$. Легко видеть, что нам надо вычислить $f(1-3\cdot 2^{-7})$, а $f(1)=\sqrt[10]{1}=1$. Положив в формуле (12)

$x_0=1$, $x_0+dx=1-3\cdot 2^{-7}$ (так что $dx=-3\cdot 2^{-7}$) и учтя, что $f'(x_0)=\frac{1}{10}x_0^{-9/10}=\frac{1}{10}$, получаем

$$\sqrt[10]{1-3\cdot 2^{-7}}=f(1-3\cdot 2^{-7})\approx 1+\frac{1}{10}(-3\cdot 2^{-7}).$$

Следовательно,

$$\sqrt[10]{1000}=2\sqrt[10]{1-3\cdot 2^{-7}}\approx 2\left(1-\frac{1}{10}\cdot 3\cdot 2^{-7}\right)\approx 1{,}995.$$

Посмотрим, какова точность равенства (11), т. е. сколь велика разность

$$\Delta y-dy,$$

где $\Delta y=f(x)-f(x_0)$, $dy=f'(x_0)(x-x_0)$ (x — независимая переменная и, следовательно, $dx=\Delta x=x-x_0$). По формуле Лагранжа между точками x и x_0 есть такая точка c, что

$$\Delta y=f(x)-f(x_0)=f'(c)(x-x_0).$$

Тогда

$$\Delta y-dy=f'(c)(x-x_0)-f'(x_0)(x-x_0)=$$
$$=(x-x_0)[f'(c)-f'(x_0)]=(x-x_0)(c-x_0)f''(c_1)$$

по той же формуле Лагранжа, примененной к разности, стоящей в квадратных скобках (c_1 — точка между c и x_0). Поскольку $|c-x_0|<|x-x_0|$, то из последнего равенства получаем $|\Delta y-dy|<|x-x_0|^2|f''(c_1)|$, c_1 расположена между x_0 и x. Это, грубо говоря, означает, что ошибка приближенных равенств (11) и (12) имеет порядок $(\Delta x)^2$, т. е. при уменьшении Δx, например, в 2 раза точность увеличивается в 4 раза.

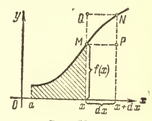


Рис. 53.

Есть еще один вид приложений дифференциала, которым мы в основном будем пользоваться в интегральном исчислении. Рассмотрим следующую задачу. Имеется график непрерывной функции $y=f(x)$. Рассмотрим площадь S фигуры, ограниченной этим графиком, отрезком $[a;x]$ оси абсцисс и вертикальными прямыми, проходящими через концы этого

отрезка (на рис. 53 эта фигура заштрихована). Каждому числу x будет соответствовать единственное число S — площадь указанной фигуры, т. е. мы имеем дело с функцией $S = S(x)$. Требуется найти дифференциал этой функции dS (говорят: дифференциал площади). Приращение функции $S(x)$, т. е.

$$\Delta S = S(x + dx) - S(x),$$

равно площади полосы $xMN(x + dx)$. Эта площадь разбивается на площадь прямоугольника $xMP(x + dx)$ и остаток — площадь MNP (обозначим ее s), так что

$$\Delta S = f(x)\,dx + s = f(x)\,dx + (s/dx)\,dx. \quad (13)$$

Если мы докажем, что s/dx есть бесконечно малая при $dx \to 0$, то (13) есть формула типа (7) и, следовательно, будет доказано, что $S(x)$ — дифференцируемая функция и $dS = f(x)\,dx$, т. е. дифференциал площади равен площади прямоугольника $xMP(x + dx)$. Для того чтобы показать, что s/dx есть бесконечно малая при $dx \to 0$, заметим, что s меньше площади прямоугольника $MQNP$, равной $MP \cdot PN$. Поскольку $MP = dx$, а $PN = \Delta y$, то

$$0 < s < dx \cdot \Delta y,$$

откуда

$$0 < s/dx < \Delta y.$$

В силу непрерывности функции $y = f(x)$ имеем $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, и потому в силу теоремы 9 $\lim\limits_{dx \to 0} s/dx = 0$, т. е. s/dx есть бесконечно малая функция при $dx \to 0$. Таким образом, доказано, что

$$dS = f(x)\,dx. \quad (14)$$

В следующей главе будет показано, как по дифференциалу функции находить саму эту функцию.

Дифференциал $df(x) = f'(x)\,dx$, с которым мы только что познакомились, есть функция от x. Может оказаться, что эта функция в свою очередь имеет дифференциал; он называется вторым дифференциалом функции $y = f(x)$ и обозначается $d^2f(x)$, или d^2f, или d^2y, так что по определению

$$d^2y = d(dy).$$

При этом по определению считают, что приращение независимого переменного $\Delta x = dx$ берется все время одним и тем же и является постоянным. Выведем формулу для подсчета второго дифференциала для случая, когда x есть независимая переменная. Так как $df(x) = f'(x)\,dx$ и по условию dx есть постоянная, то

$$d^2f(x) = d(f'(x)\,dx) = dx \cdot d(f'(x)) = dx \cdot (f'(x))'\,dx = f''(x)\,dx^2,$$

где dx^2 есть сокращенная запись выражения $(dx)^2$. Чтобы не путать dx^2 с дифференциалом функции $y = x^2$, последний записывается так: $d(x^2)$. Таким образом, имеется очень простая связь между второй производной и вторым дифференциалом:

$$d^2f(x) = f''(x)\,dx^2, \text{ или } d^2y = y''\,dx^2,$$

откуда, деля на dx^2, получаем

$$f''(x) = \frac{d^2f(x)}{dx^2}, \text{ или } y'' = \frac{d^2y}{dx^2},$$

т. е. вторая производная есть частное от деления второго дифференциала функции на квадрат дифференциала аргумента.

К сожалению, эта формула, в отличие от формулы (10) для первой производной, не сохраняется, если x есть функция.

Аналогично определяется третий дифференциал

$$d^3y = d(d^2y)$$

и получаются формулы (если x — независимая переменная)

$$d^3y = y'''\,dx^3 \text{ и } y''' = \frac{d^3y}{dx^3},$$

и определяется n-й дифференциал

$$d^ny = d(d^{n-1}y)$$

и получаются формулы (если x — независимая переменная)

$$d^ny = y^{(n)}\,dx^n \text{ и } y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}.$$

Все дифференциалы, начиная со второго, называются *старшими*, или *дифференциалами высших порядков*. Дифференциал dy принято называть *первым дифференциалом*.

ГЛАВА III

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

С первых классов средней школы все привыкли к тому, что в математике все действия в основном группируются парами—прямое и обратное: сложение и вычитание (действие, обратное сложению), умножение и деление (действие, обратное умножению) и т. д. При этом именно наличие обратных действий дает возможность решать наиболее содержательные задачи. В предыдущей главе было введено еще одно действие—дифференцирование. Обратное дифференцированию действие называется *интегрированием*. Это действие и его приложения изучаются в данной главе.

§ 1. Неопределенный интеграл

Что такое действие дифференцирования? При помощи дифференцирования ищется производная от заданной функции. Следовательно, обратное действие—интегрирование—должно заключаться в следующем: задана производная, требуется найти функцию.

Определение 12. Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$, если для всех x из области определения функции

$$F'(x) = f(x). \qquad (1)$$

Например, для функции $f(x) = \cos x$ первообразной будет функция $F(x) = \sin x$, так как $F'(x) = (\sin x)' = \cos x = f(x)$ для всех x; для функции x^2 первообразной будет функция $\frac{1}{3}x^3$, так как $\left(\frac{1}{3}x^3\right)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2$ для всех x; для скорости v точки первообразной будет путь s, который прошла эта точка, так как $s'_t = v$, и так далее.

Заметим, что если для функции $F(x)$ установлено равенство

$$dF(x) = f(x)\,dx, \tag{2}$$

то $F(x)$ есть первообразная для $f(x)$. Действительно, деля (2) на dx, получаем (в силу теоремы 24)

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = F'(x).$$

И обратно, из (1), умножив обе части равенства на dx, получаем (2).

Так как первообразная имеет производную, то она непрерывна. Но верно и более глубокое утверждение: если функция $f(x)$ непрерывна, то она имеет первообразную. В интегральном исчислении мы будем иметь дело только с непрерывными функциями.

Естественно возникает вопрос: как найти все первообразные для заданной функции? Частично ответ дается теоремой 28, а полностью этот вопрос решается в § 2 (стр. 87, свойство III).

Теорема 28. *Если $F(x)$ есть первообразная для $f(x)$, на (a, b), то все первообразные для $f(x)$ содержатся в формуле*

$$F(x) + C \quad (C \text{ — произвольная постоянная}). \tag{3}$$

Пусть $\Phi(x)$ — любая первообразная для $f(x)$. Тогда $\Phi'(x) = f(x)$, откуда

$$(\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

В силу теоремы 22 отсюда следует, что $\Phi(x) - F(x) = C$, или $\Phi(x) = F(x) + C$, а так как $(F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$ при любом C, то теорема доказана.

Определение 13. Совокупность всех первообразных для заданной функции $f(x)$ называется *неопределенным интегралом* этой функции и обозначается так:

$$\int f(x)\,dx$$

(читается: «интеграл эф от икс дэ икс»); $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, произведение $f(x)\,dx$ — *подынтегральным выражением*, $\int$ — *знаком интеграла*, x — *переменной интегрирования*.

Если $F(x)$ есть первообразная для $f(x)$, то в силу теоремы 28

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \text{ (}C\text{ — произвольная постоянная). (4)}$$

Например,

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C, \quad \int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + C;$$

при этом говорят, что проинтегрированы функция $\cos x$ и функция x^2 (или взяты интегралы от функции $\cos x$ и от функции x^2). Вычисление интеграла от заданной функции называется интегрированием этой функции. Таким образом, интегрирование функции $f(x)$ — это отыскание ее первообразной $F(x)$, т. е. такой функции $F(x)$, что $F'(x) = f(x)$. Иными словами, интегрирование заключается в том, чтобы по производной $F'(x)$ найти саму функцию $F(x)$, а с этой задачи и начинается данный параграф.

Из определения интеграла следует (в силу формулы (4)), что каждой формуле дифференциального исчисления

$$F'(x) = f(x) \quad \text{соответствует формула} \quad \int f(x)\,dx = F(x) + C$$

в интегральном исчислении, так что, в частности, вся таблица производных I—XIV из гл. II может быть переписана в виде таблицы интегралов:

I. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\quad n \neq -1,$

II. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C,$

III. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,$

IV. $\int e^x\,dx = e^x + C,$

V. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C,$

VI. $\int \cos x\,dx = \sin x + C,$

VII. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C,$

VIII. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C,$

IX. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{arctg} x + C, \\ -\operatorname{arcctg} x + C, \end{array} \right.$

X. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left\{ \begin{array}{l} \arcsin x + C, \\ -\arccos x + C, \end{array} \right.$

XI. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+q}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+q}\right| + C.$

Заметим, что в этих формулах подразумевается, что x принадлежит *интервалу*, входящему в область определения соответствующих функций.

В этой таблице надо только объяснить знак модуля в формуле II и формулу XI. Так как при $x > 0$ по определению $|x| = x$, то $(\ln|x|)' = (\ln x)' = 1/x$. Если же $x < 0$, то $|x| = -x$ и $(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = (-1)/(-x) = 1/x$. Таким образом, формула II доказана для всех $x \neq 0$, т. е. для всех x из области определения подынтегральной функции в формуле II.

Для доказательства формулы XI достаточно вычислить производную правой части:

$$(\ln|x + \sqrt{x^2+q}|)' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+q}}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+q}}\right) = \\ = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+q}} \, \frac{x+\sqrt{x^2+q}}{\sqrt{x^2+q}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+q}},$$

а это равенство верно для всех x из области определения функции, стоящей под знаком интеграла в формуле XI.

Займемся теперь основными свойствами неопределенных интегралов и правилами их вычисления.

Теорема 29 (свойства неопределенного интеграла).

1. $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$; 3. $d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx$;

2. $\int f'(x)\,dx = f(x) + C$; 4. $\int df(x) = f(x) + C$.

Символ $\int g(x)\,dh(x)$, по определению, понимается как $\int g(x)\,h'(x)\,dx$, так что 2 и 4 представляют собой, по существу, одно и то же свойство.

Свойство 1 есть непосредственное следствие из определения интеграла. В нем утверждается, что, какую бы первообразную для $f(x)$ ни взять (см. определение 13), ее производная будет равна $f(x)$, что есть определение первообразной.

Для доказательства второго свойства достаточно заметить, что $f(x)$ есть первообразная для $f'(x)$ (по определению), а затем сослаться на формулу (4).

После этого, используя свойство 1, получаем

$$d\left(\int f(x)\,dx\right) = \left(\int f(x)\,dx\right)' dx = f(x)\,dx.$$

Теорема 30 (правила вычисления неопределенных интегралов).

I. $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$ (*k — постоянная*).

II. $\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$.

III. *Интегрирование по частям*:

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$ ($u = u(x)$ *и* $v = v(x)$ — *функции*).

IV. *Замена переменной* (*подстановка*) $x = \varphi(t)$ *в интеграле производится по формуле*

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt;$$

при этом говорят, что в интеграле слева сделана замена переменной (подстановка) $x = \varphi(t)$.

Для доказательства правил I—III достаточно проверить, что справа в этих формулах стоят первообразные для подынтегральных функций или выражений: в силу теоремы 29

I. $\left(k\int f(x)\,dx\right)' = k\left(\int f(x)\,dx\right)' = kf(x)$.

II. $\left(\int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx\right)' =$

$$= \left(\int f(x)\,dx\right)' \pm \left(\int g(x)\,dx\right)' = f(x) \pm g(x).$$

III. $d\left(uv - \int v\,du\right) = d(uv) - d\left(\int v\,du\right) =$

$$= u\,dv + v\,du - v\,du = u\,dv.$$

Для доказательства IV проверим, что выражение слева есть первообразная для подынтегральной функции справа. Так как слева стоит сложная функция от t, то по теореме 16

$$\left(\int f(x)\,dx\right)'_t = \left(\int f(x)\,dx\right)'_x \cdot x'_t \underset{(*)}{=} f(x)\,\varphi'(t) = f(\varphi(t))\,\varphi'(t);$$

(*) по теореме 29, свойство 1.

Обычно (в простых случаях) не делают замены переменной, а пользуются *инвариантностью формул интегрирования:*

если $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, то $\int f(\varphi(x))\,d\varphi(x) = F(\varphi(x)) + C$

($\varphi(x)$ — любая дифференцируемая функция). Действительно,

$$\int f(\varphi(x))\,d\varphi(x) = \int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx \underset{(1)}{=} \int f(y)\,dy = F(y) + C = F(\varphi(x)) + C;$$

(1) делаем замену $y = \varphi(x)$.

Для вычисления интегралов это свойство имеет основное значение. В силу него наряду с каждой табличной формулой появляется бесконечно много формул интегрирования. Например, наряду с формулой VI в силу инвариантности формул интегрирования мы можем написать, что

$$\int \cos(x^5)\,d(x^5) = \sin(x^5) + C,$$

$$\int \cos\left(\frac{3^x}{\ln x}\right) d\left(\frac{3^x}{\ln x}\right) = \sin\left(\frac{3^x}{\ln x}\right) + C \text{ и т. д.}$$

При вычислении интегралов этим пользуются, например, так:

$$\int \frac{4x^3\,dx}{1+x^8} = \int \frac{d(x^4)}{1+(x^4)^2} = \operatorname{arctg}(x^4) + C.$$

При этом говорят, что $4x^3$ подвели под знак дифференциала, а заданный интеграл привели к табличному интегралу для арктангенса.

Кроме этого, для вычислений полезно отметить, что

$$dx = d(x+a)$$

при любой постоянной a. Действительно, так как $da = 0$, то

$$d(x+a) = dx + da = dx.$$

При вычислении интегралов этим и инвариантностью формул интегрирования пользуются, например, так:

$$\int \frac{dx}{x+7} = \int \frac{d(x+7)}{x+7} = \ln|x+7| + C \text{ (в силу II);}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}} = \int \frac{d(x-2)}{\sqrt{1-(x-2)^2}} = \arcsin(x-2) + C \text{ (в силу X).}$$

К подстановкам прибегают обычно тогда, когда производят сложные вычисления; если же вычисления не очень сложны, то пользуются инвариантностью формул интегрирования.

Рассмотрим примеры вычисления интегралов с использованием выведенных свойств и простейшие приемы интегрирования [1]).

1. $$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \int \frac{dx}{a^2\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)} = \frac{1}{a}\int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C.$$

2. $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{dx}{a\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} =$$
$$= \arcsin\frac{x}{a}+C.$$

3. $$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\int \frac{(a+x)+(a-x)}{(a+x)(a-x)}\,dx =$$
$$= \frac{1}{2a}\int \left[\frac{1}{a-x}+\frac{1}{a+x}\right]dx = \frac{1}{2a}\left[\int \frac{d(a+x)}{a+x} - \int \frac{d(x-a)}{x-a}\right] =$$
$$= \frac{1}{2a}\left[\ln|a+x| - \ln|x-a|\right] + C = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C.$$

4. $$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx \underset{(*)}{=} \int \sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\,a\cos t\,dt =$$
$$= a^2\int \cos^2 t\,dt = a^2\int \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{a^2}{2}\left(\int dt + \int \cos 2t\,dt\right) =$$
$$= \frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\int \cos 2t\,d(2t)\right) = \frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C =$$
$$= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{a^2}{2}\sin t\cdot\cos t + C = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C,$$

(*) делаем подстановку $x = a\sin t$, откуда $t = \arcsin(x/a)$.

5. Покажем, что имеет место следующая формула:

$$\int \sqrt{x^2+q}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+q} + \frac{q}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+q}\right| + C.$$

---

[1]) Во всех примерах, где встречается a^2, удобно считать, что $a > 0$.

Обозначим интеграл, стоящий слева, буквой I:

$$I=\int\sqrt{x^2+q}\,dx \underset{(*)}{=} x\sqrt{x^2+q}-\int x\,\frac{x}{\sqrt{x^2+q}}\,dx=$$
$$=x\sqrt{x^2+q}-\int\frac{x^2+q-q}{\sqrt{x^2+q}}\,dx=x\sqrt{x^2+q}-\int\sqrt{x^2+q}\,dx+$$
$$+q\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+q}}=x\sqrt{x^2+q}-I+q\ln\left|x+\sqrt{x^2+q}\right|;$$

(*) интегрируем по частям, положив $u=\sqrt{x^2+q}$, $dv=dx$, тогда $v=x$, $du=\frac{x}{\sqrt{x^2+q}}\,dx$.

Получилось уравнение относительно вычисляемого интеграла I. Перенося I в левую часть полученного равенства, имеем

$$2I=x\sqrt{x^2+q}+q\ln\left|x+\sqrt{x^2+q}\right|+C,$$

откуда и получаем требуемую формулу.

Интегралы в примерах 1 и 2 — это обобщение табличных интегралов IX и X, обычно их и считают табличными вместо IX и X. Интегралы примеров 3, 4 и 5 тоже принято считать табличными интегралами. В качестве упражнения полезно проверить, что интеграл в примере 4 можно вычислить тем же приемом, что и в примере 5. Этим же приемом вычисляются и интегралы вида

$$\int a^x\sin bx\,dx \quad \text{и} \quad \int a^x\cos bx\,dx.$$

Мы не будем больше сообщать никаких сведений из теории неопределенных интегралов, оставив их вычисление для практики. Продемонстрируем только на частных примерах еще несколько приемов.

6. $$\int\frac{x^2+x+2}{x^2+2x+4}\,dx=\int\frac{x^2+2x+4-x-2}{x^2+2x+4}\,dx=$$
$$=\int\left[1-\frac{x+1+1}{(x+1)^2+3}\right]dx=\int dx-\int\frac{x+1}{(x+1)^2+3}\,dx-\int\frac{dx}{(x+1)^2+3}=$$
$$=x-\frac{1}{2}\int\frac{2(x+1)\,d(x+1)}{3+(x+1)^2}-\int\frac{d(x+1)}{3+(x+1)^2}=$$
$$=x-\frac{1}{2}\int\frac{d[(x+1)^2+3]}{(x+1)^2+3}-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{3}}=$$
$$=x-\frac{1}{2}\ln\left[(x+1)^2+3\right]-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

7. $\int x\sqrt{x^2+3x+1}\,dx \underset{(*)}{=} \int\left(t-\frac{3}{2}\right)\sqrt{t^2-\frac{5}{4}}\,dt=$

$=\int\sqrt{t^2-\frac{5}{4}}\,t\,dt-\frac{3}{2}\int\sqrt{t^2-\frac{5}{4}}\,dt=$

$=\frac{1}{2}\int\left(t^2-\frac{5}{4}\right)^{1/2}d\left(t^2-\frac{5}{4}\right)-$

$-\frac{3}{2}\left[\frac{t}{2}\sqrt{t^2-\frac{5}{4}}+\frac{1}{2}\left(-\frac{5}{4}\right)\ln\left|t+\sqrt{t^2-\frac{5}{4}}\right|\right]=$

$=\frac{1}{2}\,\frac{(t^2-5/4)^{3/2}}{3/2}-\frac{3t}{4}\sqrt{t^2-\frac{5}{4}}+\frac{15}{16}\ln\left|t+\sqrt{t^2-\frac{5}{4}}\right|+$

$+C=\frac{1}{3}(x^2+3x+1)^{3/2}-\frac{3}{4}\left(x+\frac{3}{2}\right)\sqrt{x^2+3x+1}+$

$+\frac{15}{16}\ln\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x+1}\right|+C;$

(*) делаем подстановку $t=x+\frac{3}{2}$, рассчитанную на то, чтобы из квадратного трехчлена $x^2+3x+1=$ $=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$ выделить полный квадрат; в конце вычислений опять возвращаемся к старой переменной x:

8. $\int\cos^3x\sin^6x\,dx=\int\sin^6x\cos^2x\cos x\,dx=$

$\underset{(*)}{=}\int\sin^6x\,(1-\sin^2x)\,d(\sin x)=\int\sin^6x\,d(\sin x)-$

$-\int\sin^8x\,d(\sin x)=\frac{1}{7}\sin^7x-\frac{1}{9}\sin^9x+C;$

(*) подводим $\cos x$ под знак дифференциала, воспользовавшись тем, что $\cos x\,dx=d(\sin x)$.

Этот прием удобен, когда под знаком интеграла стоит нечетная степень синуса или косинуса. Если же степени синуса (косинуса) четные, то используют формулу половинных углов.

9. $\int\sin^4x\,dx=\int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2dx=$

$=\frac{1}{4}\left[\int dx-2\int\cos 2x\,dx+\int\cos^2 2x\,dx\right]=$

$=\frac{1}{4}\left[x-\int\cos 2x\,d(2x)+\int\frac{1+\cos 4x}{2}\,dx\right]=$

$$=\frac{1}{4}\left[x-\sin 2x+\frac{x}{2}+\frac{1}{8}\int\cos 4x\,d(4x)\right]=$$
$$=\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C.$$

Еще один пример использования тригонометрических тождеств:

10. $\int\sin 5x\cos 7x\,dx=\int\frac{1}{2}(\sin 12x-\sin 2x)\,dx=$
$$=\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{1}{24}\cos 12x+C.$$

§ 2. Определенный интеграл

При решении многих задач геометрии, естествознания и техники часто встречаются пределы особого рода сумм (интегральных сумм) — интегралы. Познакомимся с самым простым из интегралов — определенным интегралом.

Определение 14. Пусть на отрезке $[a; b]$ задана функция $f(x)$. Разобьем отрезок $[a; b]$ точками деления $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ на n более мелких отрезков $[a; x_1]$, $[x_1; x_2]$, $\ldots$, $[x_{n-1}; b]$. На каждом из этих отрезков выберем по точке: c_1 — на первом ($a\leqslant c_1\leqslant x_1$), c_2 — на втором ($x_1\leqslant c_2\leqslant x_2$), c_3 — на третьем ($x_2\leqslant c_3\leqslant x_3$) и т. д., c_n — на n-м ($x_{n-1}\leqslant c_n\leqslant b$). Длину наибольшего из отрезков обозначим λ. *Определенным интегралом* от функции $f(x)$ по отрезку $[a; b]$ называется

$$\lim_{\lambda\to 0}[f(c_1)(x_1-a)+f(c_2)(x_2-x_1)+\ldots+f(c_n)(b-x_{n-1})]=$$
$$=\int_a^b f(x)\,dx. \qquad (5)$$

Выражение, стоящее под знаком предела (в квадратных скобках), называется *интегральной суммой* для функции $f(x)$ по отрезку $[a; b]$.

Коротко говорят: определенный интеграл есть предел интегральных сумм при $\lambda\to 0$. Числа a и b называются *нижним и верхним пределами* интегрирования, остальная терминология — как у неопределенного интеграла. Оказывается (см. приложение), что если $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, то предел интегральных сумм существует.

Рассмотрим задачи, приводящие к понятию определенного интеграла.

1. Пусть дана фигура, ограниченная графиком непрерывной и неотрицательной функции $y=f(x)$, отрезком $[a;\ b]$ и прямыми $x=a$ и $x=b$ (рис. 54). Такую фигуру

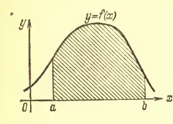


Рис. 54.

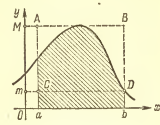


Рис. 55.

называют криволинейной трапецией. Покажем, что площадь криволинейной трапеции

$$S=\int_a^b f(x)\,dx. \qquad (6)$$

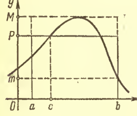


Рис. 56.

Прежде чем выводить формулу (6), заметим, что на отрезке $[a;\ b]$ можно указать такую точку c, что

$$S=f(c)(b-a). \qquad (7)$$

Действительно, пусть M — наибольшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a;\ b]$, а m — наименьшее. Проведем прямые $y=M$ и $y=m$ (рис. 55). Тогда криволинейная трапеция целиком содержится в прямоугольнике $aABb$ и содержит целиком прямоугольник $aCDb$. Поэтому

$$\text{пл. } aCDb < S < \text{пл. } aABb,$$

или

$$m(b-a) < S < M(b-a).$$

Возьмем число $p=S/(b-a)$. Ясно, что $S=p(b-a)$ и $m<p<M$. На отрезке $[a;\ b]$ возьмем такую точку c, что $f(c)=p$ (см. рис. 56 и приложение, теорема 6). Тогда

$$S=p(b-a)=f(c)(b-a).$$

Геометрически это означает, что можно указать прямоугольник с основанием на отрезке $[a;\ b]$, площадь которого равна площади рассматриваемой криволинейной трапеции.

Перейдем теперь к выводу формулы (6). Разобьем криволинейную трапецию на n полос так, как показано на рис. 57. При этом на отрезке $[a;\ b]$ появились точки x_1, x_2, ..., x_{n-1}. В соответствии с формулой (7) найдем для

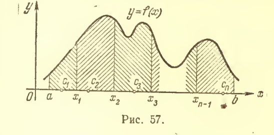


Рис. 57.

первой полосы точку c_1, $a \leqslant c_1 \leqslant x_1$, такую, что площадь первой полосы равна $f(c_1)(x_1-a)$. Для второй полосы найдем точку c_2, $x_1 \leqslant c_2 \leqslant x_2$, такую, что площадь второй полосы равна $f(c_2)(x_2-x_1)$. Поступаем так для всех n полос. Так как площадь криволинейной трапеции равна сумме площадей полос, на которые она разбита, то

$$S=f(c_1)(x_1-a)+f(c_2)(x_2-x_1)+\ldots+f(c_n)(b-x_{n-1}).$$

Такого типа равенство будет иметь место, как бы мы ни разбивали криволинейную трапецию на полосы. Перейдем в нем к пределу при $\lambda \to 0$; мы получим (6), так как S — постоянная, т. е. $\lim\limits_{\lambda \to 0} S = S$, и поэтому

$$S=\lim_{\lambda \to 0}[f(c_1)(x_1-a)+f(c_2)(x_2-x_1)+\ldots$$
$$\ldots+f(c_n)(b-x_{n-1})]=\int_a^b f(x)\,dx$$

в силу формулы (5). Формула (6) доказана.

2. Покажем, что путь s, пройденный точкой, скорость v которой меняется — т. е. $v=v(t)$ есть непрерывная

функция времени, — за промежуток времени от t_0 до T можно подсчитать по формуле

$$s = \int_{t_0}^{T} v(t)\,dt. \tag{8}$$

Предварительно заметим, что между t_0 и T можно указать такой момент времени $\tilde{t}$, что $s = v(\tilde{t})(T - t_0)$. Действительно, пусть $\overline{v}$ есть наибольшее значение скорости за промежуток времени от t_0 до T, а $\underline{v}$ — наименьшее. Тогда

$$\underline{v}(T - t_0) < s < \overline{v}(T - t_0).$$

Возьмем число $\tilde{v} = s/(T - t_0)$ (оно называется средней скоростью за промежуток времени от t_0 до T). Ясно, что $s = \tilde{v}(T - t_0)$ и что $\underline{v} < \tilde{v} < \overline{v}$. Но так как скорость меняется непрерывно, то между моментами времени t_0 и T найдется такой момент времени $\tilde{t}$, $t_0 < \tilde{t} < T$, что скорость точки в этот момент времени $v(\tilde{t}) = \tilde{v}$ (см. приложение). А тогда $s = \tilde{v}(T - t_0) = v(\tilde{t})(T - t_0)$.

Теперь перейдем к доказательству формулы (8). Разобьем промежуток времени от t_0 до T на n более мелких промежутков: от t_0 до t_1, от t_1 до t_2, ..., от t_{n-1} до T. В силу предыдущих рассуждений в первом промежутке времени есть такой момент $\tilde{t}_1$, $t_0 < \tilde{t}_1 < t_1$, что путь, пройденный точкой за время от t_0 до t_1, равен $v(\tilde{t}_1)(t_1 - t_0)$. Аналогично найдем момент времени $\tilde{t}_2$, $t_1 < \tilde{t}_2 < t_2$, такой, что путь, пройденный за время от t_1 до t_2, равен $v(\tilde{t}_2)(t_2 - t_1)$. Продолжая так и дальше, найдем, наконец, момент времени $\tilde{t}_n$, $t_{n-1} < \tilde{t}_n < T$, такой, что путь, пройденный точкой за последний промежуток времени от t_{n-1} до T, равен $v(\tilde{t}_n)(T - t_{n-1})$. Тогда

$$s = v(\tilde{t}_1)(t_1 - t_0) + v(\tilde{t}_2)(t_2 - t_1) + \ldots + v(\tilde{t}_n)(T - t_{n-1}).$$

Это равенство имеет место, как бы мы ни разбивали промежуток времени от t_0 до T на более мелкие. Перейдем теперь в этом равенстве к пределу при $\lambda \to 0$ (λ — это длина наибольшего из промежутков времени, т. е. наибольшая из разностей $t_1 - t_0$, $t_2 - t_1$, ..., $T - t_{n-1}$).

Поскольку s есть постоянная, то $\lim\limits_{\lambda\to 0} s = s$ и

$$s=\lim_{\lambda\to 0}[v(\tilde t_1)(t_1-t_0)+v(\tilde t_2)(t_2-t_1)+\ldots+v(\tilde t_n)(T-t_{n-1})]=\int_{t_0}^{T} v(t)\,dt;$$

правая часть здесь написана в силу формулы (5), так как в квадратных скобках стоит интегральная сумма для интеграла, стоящего справа.

В следующем параграфе будет решено много задач при помощи определенного интеграла. А сейчас дадим очень простое правило для вычисления определенных интегралов:

Теорема 31 (Ньютона—Лейбница). *Если* $F'(x)=f(x)$, *то*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a). \tag{9}$$

Выберем на $[a;\ b]$ точки $a<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<b$. Тогда

$$F(b)-F(a)=F(x_1)-F(a)+F(x_2)-F(x_1)+\ldots+F(b)-F(x_{n-1}).$$

Но по формуле Лагранжа (формула (6) из гл. II)

$$F(x_1)-F(a)=F'(c_1)(x_1-a)=f(c_1)(x_1-a),\quad a<c_1<x_1,$$
$$F(x_2)-F(x_1)=F'(c_2)(x_2-x_1)=f(c_2)(x_2-x_1),\quad x_1<c_2<x_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$F(b)-F(x_{n-1})=F'(c_n)(b-x_{n-1})=f(c_n)(b-x_{n-1}),\quad x_{n-1}<c_n<b.$$

Поэтому

$$F(b)-F(a)=f(c_1)(x_1-a)+f(c_2)(x_2-x_1)+\ldots+f(c_n)(b-x_{n-1}).$$

Это равенство имеет место при любом n и любом выборе точек $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1}$. Перейдем в этом равенстве к пределу при $\lambda\to 0$. Так как $F(b)-F(a)$ есть постоянная,

то $\lim\limits_{\lambda\to 0}[F(b)-F(a)]=F(b)-F(a)$, и

$$F(b)-F(a)=\lim_{\lambda\to 0}[f(c_1)(x_1-a)+f(c_2)(x_2-x_1)+\ldots$$
$$\ldots+f(c_n)(b-x_{n-1})]=\int_a^b f(x)\,dx$$

в силу формулы (5).

При вычислениях обычно принята сокращенная запись

$$F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b.$$

С помощью этого обозначения формулу (9) записывают так:

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(x)\Big|_a^b. \qquad (9')$$

Пользуясь формулой Ньютона — Лейбница, вычислим, например, интеграл

$$\int_2^5 \frac{dx}{x}=\ln|x|\Big|_2^5=\ln 5-\ln 2=\ln\frac{5}{2}.$$

Отметим еще две формы записи для формулы (9):

$$\int_a^b F'(x)\,dx=F(b)-F(a) \quad \text{и} \quad \int_a^b dF(x)=F(b)-F(a). \qquad (10)$$

Таким образом, теорема Ньютона — Лейбница сводит вычисление определенных интегралов к вычислению первообразной (т. е. неопределенного интеграла). Отсюда, при желании, можно получить объяснения некоторых названий.

Перейдем теперь к выводу правил вычисления определенных интегралов. Естественно ожидать (в силу теоремы Ньютона — Лейбница), что эти правила будут аналогичны правилам вычисления неопределенных интегралов.

Теорема 32 (правила вычисления определенных интегралов).

I. $\int_a^b kf(x)\,dx=k\int_a^b f(x)\,dx$ (k — *постоянная*).

II. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx \pm \int_a^b g(x)\, dx.$

III. *Интегрирование по частям* (*u* и *v* — *функции*)

$$\int_a^b u\, dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v\, du.$$

IV. *Замена переменной* (*подстановка*) $x = \varphi(t)$ *делается по формуле*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt,$$

где $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ (f, φ *и* φ' *непрерывны*).

I. Пусть $F'(x) = f(x)$, тогда $(kF(x))' = kF'(x) = kf(x)$ и по (9)

$$\int_a^b kf(x)\, dx = kF(b) - kF(a) = k[F(b) - F(a)] = k\int_a^b f(x)\, dx.$$

II. Пусть $F'(x) = f(x)$ и $G'(x) = g(x)$, тогда $(F \pm G)' = F' \pm G' = f \pm g$ и по (9)

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\, dx = [F(b) \pm G(b)] - [F(a) \pm G(a)] =$$

$$= [F(b) - F(a)] \pm [G(b) - G(a)] = \int_a^b f(x)\, dx \pm \int_a^b g(x)\, dx.$$

III. По формуле (10) имеем

$$uv \Big|_a^b = \int_a^b d(uv) = \int_a^b [v\, du + u\, dv] = \int_a^b v\, du + \int_a^b u\, dv$$

и, перенося первый интеграл влево, получаем требуемое.

IV. Пусть $F'(x)=f(x)$, тогда $(F(\varphi(t)))'=F'(\varphi(t))\,\varphi'(t)=$ $=f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$ и по (9)

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt=F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha))=$$

$$=F(b)-F(a)=\int_{a}^{b} f(x)\,dx.$$

Рассмотрим примеры на вычисление определенных интегралов. При этом выбор способа вычисления (сделать ту или иную подстановку или проинтегрировать по частям) диктуется теми же самыми соображениями, что и при вычислении неопределенных интегралов.

1. $$\int_{0}^{\pi/2} x\sin x\,dx \underset{(*)}{=} x(-\cos x)\Big|_{0}^{\pi/2}-\int_{0}^{\pi/2}(-\cos x)\,dx=$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(-\cos\frac{\pi}{2}\right)+0\cdot\cos 0+\sin x\Big|_{0}^{\pi/2}=1;$$

(*) интегрируем по частям, положив $u=x$, $dv=\sin x\,dx$, тогда $du=dx$ и $v=-\cos x$.

2. $$\int_{1}^{\sqrt{3}}\frac{dx}{(1+x^2)^{5/2}} \underset{(*)}{=} \int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{1}{(1+\operatorname{tg}^2 t)^{5/2}}\frac{1}{\cos^2 t}\,dt=\int_{\pi/4}^{\pi/3}\cos^3 t\,dt=$$

$$=\int_{\pi/4}^{\pi/3}(1-\sin^2 t)\,d(\sin t)=\sin t\Big|_{\pi/4}^{\pi/3}-\frac{1}{3}\sin^3 t\Big|_{\pi/4}^{\pi/3}=$$

$$=\frac{3\sqrt{3}}{8}-\frac{5\sqrt{2}}{12};$$

(*) делаем подстановку $x=\operatorname{tg} t$; новые пределы интегрирования находим из соотношений $\operatorname{tg}\alpha=1$ и $\operatorname{tg}\beta=\sqrt{3}$, откуда получаем $\alpha=\pi/4$ и $\beta=\pi/3$.

Приведем основные свойства определенных интегралов.

I. *Определенный интеграл не зависит от обозначения переменной, т. е.*

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx=\int_{a}^{b} f(t)\,dt=\int_{a}^{b} f(\varphi)\,d\varphi=\ldots,$$

так как интегральные суммы представляют собой числа, не зависящие от того, какой буквой обозначен аргумент подынтегральной функции.

$$\text{II. } \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

Определенный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ рассматривался нами только для $a < b$. Равенства II являются определениями $\int_a^b f(x)\,dx$ при $a > b$ и при $a = b$. Эти определения удобны, так как при этом сохраняется формула (9):

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = -[F(a) - F(b)] = -\int_b^a f(x)\,dx,$$

$$\int_a^a f(x)\,dx = F(a) - F(a) = 0.$$

Если формула (5) определяла определенный интеграл только по отрезку $[a; b]$, т. е. когда нижний предел интегрирования был меньше верхнего, то теперь верхний предел может быть уже любым.

Введем теперь понятие определенного интеграла с переменным верхним пределом: каждому числу x поставим в соответствие число

$$\int_a^x f(t)\,dt,$$

получим тем самым функцию от x. Эта функция называется *определенным интегралом с переменным верхним пределом*. Оказывается, что эта функция имеет производную, которая вычисляется очень просто:

$$\text{III. } \left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x),$$

т. е. определенный интеграл с переменным верхним пределом есть первообразная для подынтегральной функции.

Действительно, если $F'(x) = f(x)$, то в силу (9)

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a)$$

и

$$\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = (F(x) - F(a))' = F'(x) = f(x).$$

IV. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$

Действительно,

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = F(c) - F(a) + F(b) - F(c) =$$
$$= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Это свойство имеет простой геометрический смысл: если $f(x) \geqslant 0$ на $[a;\ b]$ и $a < c < b$, то оно утверждает, что площадь S криволинейной трапеции, заштрихованной на рис. 58, равна сумме $S_1 + S_2$ площадей составляющих ее меньших криволинейных трапеций. Действительно, в силу формулы (6)

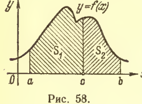


Рис. 58.

$$S = \int_a^b f(x)\,dx, \quad S_1 = \int_a^c f(x)\,dx,$$
$$S_2 = \int_c^b f(x)\,dx$$

и

$$\int_a^b f(x)\,dx = S = S_1 + S_2 = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Для n слагаемых формула имеет вид (доказывается по индукции)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{b_1} f(x)\,dx + \int_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{b_{n-1}}^{b} f(x)\,dx.$$

V (теорема о среднем). $\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$, *где* $a < c < b$.

По формуле Лагранжа (теорема 18) имеем

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F'(c)(b-a) = f(c)(b-a).$$

Геометрический смысл этой формулы для $f(x) \geqslant 0$ уже обсуждался (см. (6) и (7)).

VI. *Если* $f(x) \geqslant 0$ *на* $[a;\ b]$, *то* $\int\limits_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$.

В самом деле, по теореме о среднем

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a) \geqslant 0,$$

так как $a < c < b$, и, следовательно, $f(c) \geqslant 0$.

VII (интегрирование неравенств). *Если* $f(x) \leqslant g(x)$ *на* $[a;\ b]$, *то*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

Так как $g(x) - f(x) \geqslant 0$, то в силу свойства VI

$$0 \leqslant \int\limits_a^b [g(x) - f(x)]\,dx = \int\limits_a^b g(x)\,dx - \int\limits_a^b f(x)\,dx$$

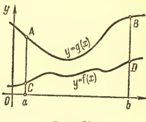


Рис. 59.

и, перенося второй интеграл налево, получаем требуемое.

Это свойство тоже имеет простой геометрический смысл: если $f(x) \geqslant 0$ на $[a;\ b]$, то оно просто утверждает, что площадь трапеции $aCDb$ (рис. 59) меньше площади трапеции $aABb$:

$$\int\limits_a^b g(x)\,dx = \text{пл.}\,(aABb) > \text{пл.}\,(aCDb) = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

VIII (теорема об оценке). *Если* $m \leqslant f(x) \leqslant M$ *на* $[a; b]$, *то*

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a).$$

Так как $f(x) \leqslant M$ на $[a; b]$, то в силу свойства VII

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b M\,dx = M\int_a^b dx = Mx\Big|_a^b = M(b-a).$$

Левая часть неравенства доказывается аналогично.

Это свойство тоже легко проиллюстрировать геометрически: если $f(x) \geqslant 0$ на $[a; b]$, то оно утверждает, что площадь криволинейной трапеции больше площади прямоугольника $aCDb$ (рис. 55), но меньше площади прямоугольника $aABb$.

IX (геометрический смысл определенного интеграла). *Определенный интеграл равен алгебраической сумме площадей фигур, ограниченных отрезком интегрирования,*

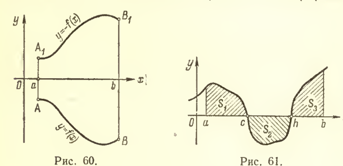


Рис. 60. Рис. 61.

графиком подынтегральной функции и прямыми $x=a$, $x=b$. (При этом площади, расположенные над осью Ox, берутся со знаком плюс, а площади, расположенные под осью Ox, берутся со знаком минус.)

Рассмотрим сначала случай, когда $f(x) \leqslant 0$ на $[a; b]$. Тогда $-f(x) \geqslant 0$. Графики этих функций симметричны относительно оси Ox и потому пл. $(aABb)$ = пл. $(aA_1B_1b) = S$

(рис. 60). Но по формуле (6) $\int\limits_a^b [-f(x)]\,dx = S$, откуда

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = -S.$$

В общем случае отметим точки пересечения графика подынтегральной функции с осью Ox (на рис. 61 точки c и h). Тогда по IV

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^h f(x)\,dx + \int\limits_h^b f(x)\,dx = S_1 - S_2 + S_3,$$

так как $f(x) \leqslant 0$ на $[c;\ h]$ и по предыдущему

$$\int\limits_c^h f(x)\,dx = -S_2.$$

Рассмотрим некоторые применения описанных выше свойств. Покажем, например, что с точностью до 10^{-5} интеграл

$$I = \int\limits_3^{1000} 2^{-x^3}\,dx$$

равен нулю.

Оценим интеграл при помощи свойства VIII. Функция $2^{-x^3} > 0$ и монотонно убывает; следовательно, свое

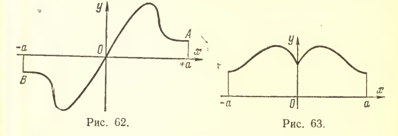


Рис. 62. Рис. 63.

наибольшее значение M на отрезке $[3;\ 1000]$ она имеет при $x = 3$, т. е. $M = 2^{-3^3} = 2^{-27} < 10^{-8}$, и потому

$$0 < I < 10^{-8}(1000 - 3) < 10^{-5}.$$

Покажем, что для любой нечетной функции $f(x)$

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0. \qquad (11)$$

В силу нечетности $f(x)$ ее график симметричен относительно начала координат (рис. 62). Поэтому пл. (OAa) = пл. $(OB(-a))$, а по IX заданный интеграл равен разности этих площадей. Поэтому, не вычисляя, можно написать

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(x^5)\,dx = 0.$$

Аналогично показывается, что для четной функции (рис. 63)

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx. \qquad (12)$$

§ 3. Приложения интегрального исчисления

В этом параграфе при помощи интегрального исчисления будет решен ряд задач. При этом основное внимание уделено не столько выведенным формулам, сколько тем

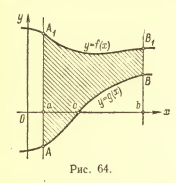


Рис. 64.

Рис. 65.

методам и способам рассуждений, при помощи которых эти формулы были получены.

Площадь S фигуры, ограниченной графиком функции $y=f(x)$ (сверху) и $y=g(x)$ (снизу) и прямыми $x=a$,

$x=b$, подсчитывается по формуле

$$S=\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx. \qquad (13)$$

Действительно, в силу геометрического смысла определенного интеграла (см. § 2, свойство IX) имеем (рис. 64)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{пл.}\ (aA_1B_1b)$$

и

$$\int_a^b g(x)\,dx = \text{пл.}\ (cBb) - \text{пл.}\ (aAc),$$

поэтому

$$\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx =$$
$$= \text{пл.}\ (aA_1B_1b) - \text{пл.}\ (cBb) + \text{пл.}\ (aAc) = S,$$

как это видно из чертежа.

Например, подсчитаем площадь между параболами $y=4x-x^2$ и $y=x^2-6$ (рис. 65). Сначала найдем точки пересечения парабол, для чего решим систему уравнений

$$\begin{cases} y=4x-x^2, \\ y=x^2-6, \end{cases}$$

т. е. найдем точки на плоскости, координаты которых удовлетворяют одновременно уравнениям обеих парабол.

Из этой системы

$$x^2-2x-3=0 \quad \text{и} \quad x_1=-1;\ x_2=3.$$

Тогда по формуле (13) искомая площадь S будет равна

$$S=\int_{-1}^{3} [(4x-x^2)-(x^2-6)]\,dx =$$
$$= \int_{-1}^{3} [6+4x-2x^2]\,dx = \left[6x+2x^2-\frac{2}{3}x^3\right]_{-1}^{3} =$$

$$= \left[6\cdot 3 + 2\cdot 3^2 - \frac{2}{3}\cdot 3^3\right] - \\ - \left[6\cdot(-1) + 2\cdot(-1)^2 - \frac{2}{3}\cdot(-1)^3\right] = 21\frac{1}{3}.$$

Перейдем теперь к следующей задаче — определению длины линии. В школьном курсе давалось определение длины окружности как предела периметров правильных вписанных многоугольников при неограниченном удвоении числа их сторон. Теперь мы должны обобщить это определение на любые линии. Для этого выделим из приведенного выше определения самое существенное: в линию (окружность) вписывается ломаная, берется длина этой

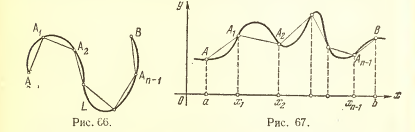


Рис. 66. Рис. 67.

ломаной, а затем увеличивается число звеньев ломаной так, что длины всех звеньев стремятся к нулю (удваивание числа сторон). Из этого и будем исходить.

Определение 15. *Длиной l линии L* называется предел

$$\lim_{\mu\to 0} \text{длина } (AA_1A_2 \ \ldots\ A_{n-1}B) = l, \tag{14}$$

где $AA_1A_2 \ \ldots\ A_{n-1}B$ — вписанная в L ломаная, а μ — длина наибольшего из звеньев этой ломаной (рис. 66).

Покажем, что если линия L есть график функции $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, имеющей непрерывную производную, то ее длина

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx. \tag{15}$$

Впишем в линию L ломаную $AA_1A_2 \ \ldots\ A_{n-1}B$ (рис. 67). Ее вершины имеют координаты: $A(a;\ f(a))$, $A_1(x_1;\ f(x_1))$,

$A_2(x_2;\,f(x_2)),\ \ldots,\ A_{n-1}(x_{n-1};\,f(x_{n-1})),\ B(b;\,f(b))$. Подсчитаем длину этой ломаной.

По формуле Лагранжа

$$f(x_1)-f(a)=f'(c_1)(x_1-a),\quad a<c_1<x_1,$$

так что длина первого звена равна (см. приложение)

$$AA_1=\sqrt{(x_1-a)^2+[f(x_1)-f(a)]^2}=$$
$$=\sqrt{(x_1-a)^2+[f'(c_1)(x_1-a)]^2}=$$
$$=\sqrt{1+[f'(c_1)]^2}\,(x_1-a),\quad a<c_1<x_1.$$

Аналогично устанавливается, что длина второго звена равна

$$A_1A_2=\sqrt{1+[f'(c_2)]^2}\,(x_2-x_1),\quad x_1<c_2<x_2,$$

и т. д., и, наконец, длина последнего звена

$$A_{n-1}B=\sqrt{1+[f'(c_n)]^2}\,(b-x_{n-1}),\ x_{n-1}<c_n<b.$$

Следовательно, в силу определения длины линии (формула (14))

$$l=\lim_{\mu\to 0}\Big[\sqrt{1+[f'(c_1)]^2}\,(x_1-a)+\sqrt{1+[f'(c_2)]^2}\,(x_2-x_1)+\ldots$$
$$\ldots+\sqrt{1+[f'(c_n)]^2}\,(b-x_{n-1})\Big].$$

А так как очевидно, что наибольшее звено μ ломаной и длина λ наибольшего из отрезков $[a;\,x_1]$, $[x_1;\,x_2]$, ..., $[x_{n-1};\,b]$ (на которые разбился отрезок $[a;\,b]$) стремятся к нулю одновременно, то

$$l=\lim_{\lambda\to 0}\Big[\sqrt{1+[f'(c_1)]^2}\,(x_1-a)+\sqrt{1+[f'(c_2)]^2}\,(x_2-x_1)+\ldots$$
$$\ldots+\sqrt{1+[f'(c_n)]^2}\,(b-x_{n-1})\Big]=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx,$$

так как в квадратных скобках стоит интегральная сумма для написанного интеграла.

Найдем, например, длину линии $y=\frac{2}{3}x\sqrt{x}$, $0\leqslant x\leqslant 3$. Так как $y'=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{x}=\sqrt{x}$, то по формуле (15)

получаем длину l линии

$$l=\int_0^3 \sqrt{1+x}\,dx=\frac{2}{3}(1+x)^{3/2}\Big|_0^3=\frac{2}{3}\left[4^{3/2}-1^{3/2}\right]=4\frac{2}{3}.$$

Рассмотрим линию $y=f(x)$, $a\leqslant x\leqslant b$, и точку на ней $M(x;\ f(x))$. Каждому числу x поставим в соответствие число $l=l(x)$ — длину линии AM (рис. 68). Этим на отрезке $[a;\ b]$ задана функция $l=l(x)$. Дифференциал этой функции dl называется *дифференциалом дуги*. Покажем, что

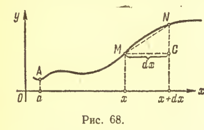


Рис. 68.

$$dl^2=dx^2+dy^2. \quad (16)$$

Действительно, так как в силу формулы (15)

$$l(x)=\int_a^x \sqrt{1+[f'(t)]^2}\,dt,$$

то, используя свойство III определенного интеграла из § 2, имеем

$$dl=l'_x\,dx=\left(\int_a^x \sqrt{1+[f'(t)]^2}\,dt\right)'_x dx=\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx. \quad (17)$$

Отсюда, возводя в квадрат и учитывая, что $f'(x)\,dx=dy$, получаем

$$dl^2=(1+[f'(x)]^2)\,dx^2=dx^2+[f'(x)\,dx]^2=dx^2+dy^2,$$

что и требовалось доказать.

Формула (16) имеет простой геометрический смысл — это теорема Пифагора «в малом». В самом деле, если воспользоваться формулой (11) гл. II, то (рис. 68)

$$NC=\Delta y\approx dy,\ \smile{MN}=\Delta l\approx dl. \quad (18)$$

Но по теореме Пифагора для прямоугольного $\triangle MNC$

$$MN^2=MC^2+NC^2,$$

откуда, пользуясь приближенными равенствами (18), получаем

$$dl^2 = dx^2 + dy^2$$

и равенство при этом точное, что гарантируется формулой (16). Сделаем теперь некоторые общие выводы. Сравним формулы (15) и (17). Под знаком интеграла в формуле (15) стоит dl, как это видно из формулы (17). Сравним еще формулу (6) с формулой (14) гл. II. Опять то же, что и с длиной линии, — под знаком интеграла в формуле (6) стоит dS. Если с этой точки зрения проанализировать формулу (13), то мы опять получим, что под знаком интеграла стоит dS. Действительно, это получается так же, как при выводе формулы (17).

Рис. 69.

Можно привести и чисто геометрическое рассуждение (аналогичное тому, которое было проведено в гл. II для доказательства равенства $dS = f(x)\,dx$). При этом опустим ряд деталей доказательства и дадим так называемую «рабочую схему». Дифференциал площади, заштрихованной на рис. 64, равен площади прямоугольника $NMPQ$, заштрихованного на рис. 69 (ср. с рассуждениями из гл. II и с рис. 53), так что

$$dS = NM \cdot NQ.$$

А так как $NQ = dx$ и, как видно из чертежа,

$$MN = Mx - Nx = f(x) - g(x),$$

то в рассматриваемом случае

$$dS = [f(x) - g(x)]\,dx.$$

Из всех этих примеров напрашивается следующая схема использования интегрального исчисления (при этом некоторая неопределенность сказанного ниже будет конкретизирована при решении примеров): для того чтобы подсчитать некоторую функцию, надо найти ее дифференциал, а затем интеграл от найденного дифференциала даст нам искомое.

Именно это было отмечено в разобранных примерах. На это же наталкивает и вторая формула (10), если $F(a)=0$.

Решим, например, следующую задачу: по отрезку $[a; b]$ движется точка под действием переменной силы $F=F(x)$, направленной вдоль отрезка (в каждой точке x отрезка сила F имеет определенное значение $F(x)$); требуется подсчитать работу A этой силы. На каждом отрезке $[a; x]$ сила F делает некоторую работу $A(x)$. Эта работа есть неизвестная нам функция от x. Для того чтобы ее найти, воспользуемся дифференциалом dA, который, как оказывается, очень просто связан с заданной силой $F(x)$. Приращение $\Delta A=A(x+\Delta x)-A(x)$ есть работа силы F на отрезке $[x; x+\Delta x]$. Так как $F(x)$ непрерывна, то $\Delta A = F(x)\Delta x+\alpha\cdot\Delta x$ (α — бесконечно малая при $\Delta x\to 0$), т. е. $dA=F(x)\,dx$. Тогда вся работа равна

$$A=\int_a^b F(x)\,dx.$$

Точный смысл проведенных выше рассуждений аналогичен рассуждениям из гл. II (вывод формулы (14)).

Выведем формулу для вычисления объемов тел. Пусть задано тело с объемом V. Про это тело известно следующее: имеется такая прямая — назовем ее осью Ox (рис. 70),

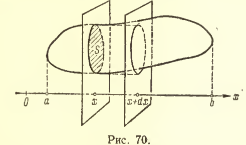


Рис. 70.

что, какую бы плоскость, перпендикулярную оси Ox, мы ни взяли, нам известна площадь S сечения взятого тела этой плоскостью. Уточним, что это значит.

Каждая плоскость, перпендикулярная оси Ox, пересекает ее в некоторой точке x. Стало быть, каждому числу x

сопоставлено единственное число $S(x)$ — площадь S сечения взятого тела плоскостью, перпендикулярной оси Ox и проходящей через точку x. Другими словами, задана функция $S=S(x)$. Коротко это формулируют так: задано тело с известными поперечными сечениями. При этом некоторые плоскости, например, проходящие через точки вне некоторого отрезка $[a;\ b]$, не пересекают рассматриваемого тела, для них $S=0$. Если функция $S(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\ b]$, то справедлива формула

$$V=\int_a^b S(x)\,dx. \qquad (19)$$

Для вывода этой формулы заметим, что каждому числу x из отрезка $[a;\ b]$ соответствует число $V(x)$ — объем части тела, расположенного левее точки x. Найдем дифференциал этой, неизвестной нам, функции $V(x)$. Так как

$$\Delta V=V(x+dx)-V(x)$$

есть объем части тела, заключенного между плоскостями (рис. 70), а $S(x)$ непрерывна, то ΔV мало отличается от объема цилиндра, изображенного на рис. 70 (с площадью основания $S(x)$ и высотой dx). Поэтому $\Delta V=S(x)\,dx+\alpha\cdot dx$ (α — бесконечно малая при $dx\to 0$). Следовательно, $dV=S(x)\,dx$. А поскольку $V(a)=0$ и $V(b)=V$, то в силу формулы (10)

$$V=\int_a^b dV=\int_a^b S(x)\,dx.$$

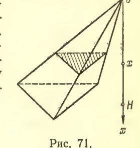


Рис. 71.

Например, найдем объем пирамиды с высотой H и с площадью основания S. Выберем ось Ox перпендикулярно плоскости основания пирамиды, а точку O поместим «на уровне ее вершины», положительное направление — от вершины к основанию (рис. 71). Пересечем пирамиду плоскостью, перпендикулярной оси Ox и проходящей через точку x. Фигура, полученная в сечении, имеет площадь $S(x)$ и подобна основанию, поэтому (площади

сечений относятся как квадраты высот)

$$\frac{S(x)}{S} = \left(\frac{x}{H}\right)^2,$$

откуда получаем выражение для $S(x)$:

$$S(x) = \frac{S}{H^2} x^2.$$

Остается использовать формулу (19) для вычисления объема:

$$V = \int_0^H S(x)\,dx = \int_0^H \frac{S}{H^2} x^2 dx = \frac{S}{H^2} \frac{x^3}{3} \Big|_0^H = \frac{SH^3}{3H^2} = \frac{1}{3} SH.$$

Иногда приходится подсчитывать объемы в другой ситуации. Например, рассмотрим криволинейную трапецию, ограниченную графиком неотрицательной функции $y = f(x)$,

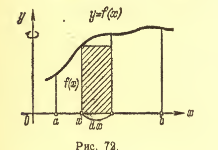


Рис. 72.

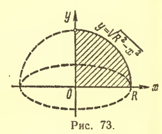


Рис. 73.

отрезком $[a; b]$ и прямыми $x = a$, $x = b$ (рис. 54). Пусть эта криволинейная трапеция вращается вокруг оси ординат. При этом получается тело вращения с объемом V. Покажем, что

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x)\,dx. \qquad (20)$$

Подсчитаем дифференциал этого объема. Для этого рассмотрим прямоугольник, заштрихованный на рис. 72. При его вращении вокруг оси Oy образуется цилиндрический слой со стенками толщиной dx, радиуса x и высоты $f(x)$. Объем этого слоя, приближенно подсчитанный

(как произведение площади его боковой поверхности на толщину стенок), и будет искомым дифференциалом:

$$dV = 2\pi x \cdot f(x)\,dx.$$

По этому дифференциалу находим объем:

$$V = \int_a^b dV = \int_a^b 2\pi x f(x)\,dx = 2\pi \int_a^b x f(x)\,dx.$$

Найдем, например, объем шара радиуса R. Для этого достаточно найти объем полушара, который получается при вращении четверти круга (рис. 73) вокруг оси Oy. Так как уравнение этой окружности будет

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}, \quad 0 \leqslant x \leqslant R,$$

то по формуле (20) объем V_1 полушара равен

$$V_1 = 2\pi \int_0^R x\sqrt{R^2 - x^2}\,dx = -\pi \int_0^R (R^2 - x^2)^{1/2}\,d(R^2 - x^2) = \\ = -\frac{2}{3}\pi (R^2 - x^2)^{3/2}\Big|_0^R = \frac{2}{3}\pi R^3,$$

откуда получается известная формула для объема шара $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Выведем формулу для подсчета площади поверхности вращения. Пусть линия L есть график непрерывно дифференцируемой функции $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$. При вращении линии L вокруг оси Ox получается поверхность вращения. Покажем, что площадь S этой поверхности подсчитывается по формуле

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx. \qquad (21)$$

Найдем дифференциал площади поверхности вращения. Возьмем на линии L кусок, расположенный над отрезком $[x;\ x + dx]$, длины dl (рис. 74). При вращении вокруг оси Ox этот кусок образует на поверхности полосу (рис. 75). Подсчитаем площадь полученной полосы (с некоторым упрощением) — это и будет искомый дифференциал. Будем считать, что данная полоса есть боковая поверхность

усеченного конуса (рис. 76, это первое упрощение) с образующей длины dl (это — второе упрощение, на чертеже образующая показана пунктиром) и радиусами оснований $f(x)$ и $f(x+dx)$. Площадь боковой поверхности полученного усеченного конуса равна

$$\pi[f(x)+f(x+dx)]\,dl \approx \approx 2\pi f(x)\,dl$$

(это — третье и последнее упрощение), что и будет искомым дифференциалом

$$dS = 2\pi f(x)\,dl = = 2\pi f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx.$$

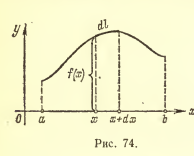


Рис. 74.

По найденному дифференциалу получаем искомую площадь

$$S = \int_a^b dS = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx.$$

Например, пусть вокруг оси Ox вращается парабола $y = 2\sqrt{x}$, $0 \leqslant x \leqslant 3$. Получается поверхность вращения —

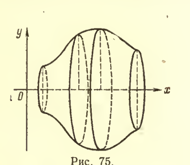


Рис. 75.

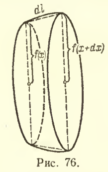


Рис. 76.

параболоид. Подсчитаем площадь поверхности этого параболоида. Так как $y' = 1/\sqrt{x}$, то по формуле (21) получаем

$$S = 2\pi\int_0^3 2\sqrt{x}\sqrt{1+1/x}\,dx = 4\pi\int_0^3 \sqrt{x+1}\,dx = = 4\pi(x+1)^{3/2}\cdot\frac{2}{3}\Big|_0^3 = 56\pi/3.$$

Подсчитаем момент инерции прямого кругового однородного конуса относительно оси (рис. 77). Тело однородно — это значит, что масса каждого куска данного тела пропорциональна объему куска и коэффициент пропорциональности постоянен (это — плотность тела). Для простоты мы будем считать, что плотность нашего конуса равна единице. Рассмотрим все точки конуса, расстояние которых от оси заключено между x и $x+dx$. В плоскости, проходящей через ось конуса, эти точки заполняют полоски шириной dx, заштрихованные на рис. 77. Все интересующие нас точки образуют фигуру, которая получается при вращении этих полосок вокруг оси конуса. Подсчитаем момент инерции данной фигуры (с некоторыми упрощениями) — это будет дифференциал момента инерции конуса. Масса фигуры равна ее объему, который мы подсчитаем так же, как при выводе формулы (20); он равен

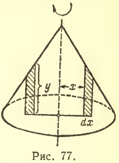


Рис. 77.

$$2\pi xy\,dx,$$

и надо только определить y в зависимости от x. Если радиус основания конуса R, а его высота H, то легко получается, что

$$y=\frac{H}{R}(R-x).$$

Тогда момент инерции этой фигуры равен ее массе, умноженной на x^2:

$$dJ=2\pi x^3\frac{H}{R}(R-x)\,dx.$$

По найденному дифференциалу получаем момент инерции конуса

$$J=\int_0^R dJ=\int_0^R 2\pi x^3\frac{H}{R}(R-x)\,dx=2\pi\frac{H}{R}\int_0^R (x^3R-x^4)\,dx=$$

$$=2\pi\frac{H}{R}\left(\frac{x^4}{4}R-\frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^R=\frac{\pi}{10}HR^4.$$

Еще раз подчеркнем, что во всех разобранных примерах подсчеты ведутся «в рабочем порядке», что обычно совершенно достаточно. Точный смысл, скрывающийся за этими вычислениями, объяснен на примере вывода формулы (14) гл. II.

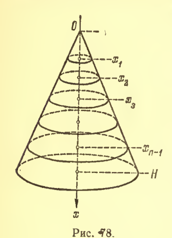


Рис. 78.

Рассмотрим под конец пример на применение определенного интеграла, в котором непосредственно используется определение 14. Покажем, что центр тяжести однородного прямого кругового конуса с высотой H и радиусом основания R расположен на оси симметрии этого конуса на расстоянии $\frac{3}{4}H$ от его вершины. Для этого разобьем конус на слои плоскостями, перпендикулярными оси конуса (рис. 78). Ось конуса примем за ось Ox. Первый слой (соответствующий отрезку $[0;\ x_1]$ на оси Ox) имеет массу m_1, и его центр тяжести расположен (в силу однородности и симметрии относительно оси Ox) внутри отрезка $[0;\ x_1]$ в какой-то точке $\bar{c}_1$. Второй слой (соответствующий отрезку $[x_1;\ x_2]$) имеет массу m_2, и его центр тяжести находится внутри отрезка $[x_1;\ x_2]$ в некоторой точке $\bar{c}_2$, ..., n-й слой (соответствующий отрезку $[x_{n-1};\ H]$) имеет массу m_n и центр тяжести внутри отрезка $[x_{n-1};\ H]$ в некоторой точке $\bar{c}_n$. Из физики известно, что центр тяжести всего конуса (составленного из этих слоев) находится тогда тоже на оси Ox в точке

$$X = \frac{m_1\bar{c}_1 + m_2\bar{c}_2 + \ldots + m_n\bar{c}_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}. \qquad (22)$$

Так как конус однороден, т. е. его плотность γ постоянна, то масса каждого слоя равна его объему, умноженному на плотность:

$$m_1 = \gamma v_1,\ \ m_2 = \gamma v_2,\ \ \ldots,\ \ m_n = \gamma v_n, \qquad (23)$$

где $v_1, v_2, \ldots, v_n$ — соответственно объемы первого, второго, ..., n-го слоя. Из (23) и (22) после сокращения на общий множитель γ следует, что

$$X = \frac{v_1\bar{c}_1 + v_2\bar{c}_2 + \ldots + v_n\bar{c}_n}{v_1 + v_2 + \ldots + v_n}. \qquad (24)$$

Здесь в знаменателе стоит сумма объемов всех слоев, что равно объему конуса, т. е.

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n = \pi H R^2/3. \qquad (25)$$

Займемся числителем. Первый слой есть конус с высотой x_1 и радиусом основания Rx_1/H; поэтому его объем удовлетворяет неравенствам

$$0 < v_1 = \frac{\pi}{3}\left(\frac{R}{H}\right)^2 x_1^3 < \pi\left(\frac{R}{H}\right)^2 x_1^3. \qquad (26)$$

Так как точка $\bar{c}_1$ находится внутри отрезка $[0;\ x_1]$, то

$$0 < \bar{c}_1 < x_1. \qquad (27)$$

Из неравенств (27) и (26) следует, что

$$0 < v_1\bar{c}_1 < \pi (R/H)^2 x_1^4 = \pi (R/H)^2 x_1^3 (x_1 - 0). \qquad (28)$$

Функция $\pi (R/H)^2 x^3$ на отрезке $[0;\ x_1]$ непрерывно изменяется от 0 до $\pi (R/H)^2 x_1^3$, и потому на отрезке $[0;\ x_1]$ есть такая точка c_1, что

$$v_1\bar{c}_1 = \pi (R/H)^2 c_1^3 (x_1 - 0). \qquad (29)$$

Проведем аналогичные рассуждения для второго слоя. Второй слой есть усеченный конус с высотой $(x_2 - x_1)$ и радиусами оснований Rx_1/H и Rx_2/H; поэтому его объем (рис. 79) удовлетворяет неравенствам

$$\pi (R/H)^2 x_1^2 (x_2 - x_1) < v_2 < \pi (R/H)^2 x_2^2 (x_2 - x_1). \qquad (30)$$

Так как точка $\bar{c}_2$ находится внутри отрезка $[x_1;\ x_2]$, то

$$x_1 < \bar{c}_2 < x_2. \qquad (31)$$

Из неравенств (31) и (30) следует, что

$$\pi (R/H)^2 x_1^3 (x_2 - x_1) < v_2\bar{c}_2 < \pi (R/H)^2 x_2^3 (x_2 - x_1). \qquad (32)$$

Функция $\pi (R/H)^2 x^3$ (та же, что и для первого слоя) на отрезке $[x_1;\ x_2]$ непрерывно изменяется от значения

$\pi(R/H)^2 x_1^3$ до $\pi(R/H)^2 x_2^3$. Поэтому на отрезке $[x_1;\ x_2]$ есть точка c_2 такая, что

$$v_2\bar{c}_2 = \pi(R/H)^2 c_2^3 (x_2 - x_1). \qquad (33)$$

Продолжая действовать таким же образом, найдем, наконец, для n-го слоя на отрезке $[x_{n-1};\ H]$ точку c_n такую, что

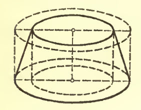


Рис. 79.

$$v_n\bar{c}_n = \pi(R/H)^2 c_n^3 (H - x_{n-1}). \qquad (34)$$

Из (24), (25), (29), (33) и (34) следует, что

$$X = \frac{1}{\frac{\pi}{3} HR^2} [\pi(R/H)^2 c_1^3 (x_1 - 0) + \pi(R/H)^2 c_2^3 (x_2 - x_1) + \ldots \\ \ldots + \pi(R/H)^2 c_n^3 (H - x_{n-1})].$$

Эта формула имеет место при любом разбиении конуса на слои. Перейдем в этом равенстве к пределу при $\lambda \to 0$ (как обычно, λ есть длина наибольшего из отрезков $[0;\ x_1]$, $[x_1;\ x_2]$, ..., $[x_{n-1};\ H]$). Так как координата X центра тяжести конуса есть постоянная, то $\lim\limits_{\lambda \to 0} X = X$ и

$$X = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\pi(R/H)^2}{\frac{\pi}{3} HR^2} [c_1^3 (x_1 - 0) + c_2^3 (x_2 - x_1) + \ldots \\ \ldots + c_n^3 (H - x_{n-1})] = \frac{3}{H^3} \int_0^H x^3\,dx = \frac{3}{4} H,$$

так как под знаком предела стоит интегральная сумма для интеграла, стоящего справа.

ГЛАВА IV

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Многие вопросы естествознания и техники сводятся к следующей задаче: требуется найти неизвестную функцию $y=y(x)$, если известно уравнение, содержащее x, y, y', y'', $\ldots$, $y^{(n)}$. Такие уравнения называются *дифференциальными уравнениями*.

§ 1. Уравнения первого порядка

Для начала рассмотрим так называемую задачу о прожекторе: имеется точечный источник света и зеркало; каким должно быть зеркало, чтобы все отраженные от него лучи были параллельны.

Из соображений симметрии следует, что зеркало должно быть поверхностью вращения, и достаточно найти его меридиан, т. е. линию, при вращении которой получается эта поверхность вращения.

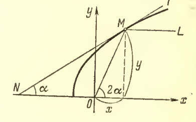


Рис. 80.

Возьмем систему координат следующим образом: начало координат совместим с источником света, а ось Ox расположим параллельно отраженным лучам (рис. 80). Тогда меридиан будет графиком некоторой функции $y=y(x)$, которая нам неизвестна и которую надо найти. При этом мы будем пользоваться законом отражения света, известным из физики: угол падения равен углу отражения (угол падения OMN, где NM — касательная к линии в точке

M, угол отражения LMT). Так как отраженный луч $ML \parallel Ox$ (по выбору оси Ox), то $\angle TML = \alpha$ (как соответственные углы при параллельных). В силу законов отражения $\angle NMO = \angle TML$, и потому $\angle NMO = \alpha$.

Таким образом, в треугольнике NMO $\angle M = \angle N = \alpha$ и, следовательно, внешний угол $\angle xOM = \angle M + \angle N = 2\alpha$. Угловой коэффициент прямой OM равен

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2y'}{1 - y'^2},$$

так как $\operatorname{tg} \alpha = y'$ (гл. II, пример 8). Отсюда после преобразований получаем уравнение

$$y'^2 + 2(x/y)\, y' - 1 = 0. \qquad (1)$$

Поскольку точка M — это любая точка на линии, то уравнение (1) должно удовлетворяться в любой точке искомой линии или, что то же самое, неизвестная функция $y = y(x)$ должна быть такова, что в любой точке x ее значение y и значение ее производной y' должны удовлетворять уравнению (1). Таким образом, для искомой линии уравнение (1) превращается в тождество.

Получилось дифференциальное уравнение. Попробуем его решить, т. е. найти все функции, которые обращают это уравнение в тождество. Найдем из уравнения (1) производную:

$$y' = -x/y \pm \sqrt{(x/y)^2 + 1}. \qquad (2)$$

Пока возьмем корень со знаком плюс. Учитывая, что $y > 0$ (см. рис. 80), получаем отсюда

$$yy' + x = \sqrt{x^2 + y^2}, \text{ или } (x^2 + y^2)' = 2\sqrt{x^2 + y^2},$$

откуда

$$\frac{(x^2 + y^2)'}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = 1, \text{ или } (\sqrt{x^2 + y^2})' = (x)'.$$

Но если производные двух функций равны, то эти функции отличаются только постоянным слагаемым (см. теорему 22), и потому

$$\sqrt{x^2 + y^2} = x + C, \qquad (3)$$

откуда легко находим, что

$$y = \sqrt{C^2 + 2Cx}. \tag{4}$$

Следовательно, искомая линия есть парабола с фокусом в начале координат. Сразу же отметим, что если взять второй корень уравнения (1), т. е. взять в (2) корень со знаком минус, то в (3) тоже получим корень со знаком минус, но это никак не скажется на (4). Таким образом, формула (4) дает все функции, удовлетворяющие уравнению (1).

Сделаем отсюда сначала частный вывод для решения нашей задачи: зеркало для прожектора получается только при вращении параболы вокруг ее оси симметрии, а источник света должен помещаться в фокусе параболы.

А теперь сделаем некоторые замечания общего характера. При решении задачи мы получили уравнение (1), содержащее x, y и y'; такое уравнение называется уравнением первого порядка (нет старших производных). Общее определение здесь будет такое:

Определение 16. Уравнение вида

$$F(x;\ y;\ y') = 0, \text{ или } y' = f(x;\ y), \tag{5}$$

где y есть неизвестная функция от x, называется *дифференциальным уравнением первого порядка*.

Далее, в задаче мы искали такую функцию, которая обращала бы уравнение (1) в тождество,— это и было решение нашей задачи. В общем случае определение такое же:

Определение 17. Функция $y = \varphi(x)$ называется *решением дифференциального уравнения* (5) на интервале $(a;\ b)$, если

$$F(x;\ \varphi(x);\ \varphi'(x)) = 0, \text{ или } \varphi'(x) = f(x;\ \varphi(x))$$

для всех x из $(a;\ b)$ (иначе говоря, $y = \varphi(x)$ обращает уравнение в тождество).

Например, для дифференциального уравнения

$$y' \sin x - y \cos x = 0$$

функция $y = \sin x$ будет решением, так как при подстановке в это уравнение функции $\sin x$ вместо y и

производной $(\sin x)' = \cos x$ вместо y' получится равенство

$$\cos x \cdot \sin x - \sin x \cdot \cos x = 0,$$

верное для всех x. А вот функция $y = x^2$ не будет решением этого уравнения, так как если подставить в уравнение вместо y эту функцию x^2, а вместо y' ее производную $(x^2)' = 2x$, то получим равенство

$$2x \cdot \sin x - x^2 \cos x = 0,$$

которое выполняется только в отдельных точках.

Наконец, решая дифференциальное уравнение (1), мы нашли все его решения, гарантировали, что других функций, обращающих уравнение (1) в тождество, кроме выписанных в формуле (4), нет. Этим была полностью решена поставленная задача. В общем случае имеет место

Определение 18. *Решить дифференциальное уравнение* — это значит найти все решения этого уравнения.

Так, формула (4) дает все решения дифференциального уравнения (1). Для дифференциального уравнения

$$y' = f(x)$$

все решения даются формулой

$$y = \int f(x)\,dx.$$

Познакомимся с простейшим (и вместе с тем основным) типом дифференциального уравнения первого порядка и его решением.

Определение 19. Уравнение вида

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)} \tag{6}$$

называется *дифференциальным уравнением первого порядка с разделяющимися переменными*.

Например, уравнения

$$y' = x \sin y; \quad e^y y' \cdot x - y \ln x = 0; \quad \cos x \cdot y' = y^3 + 7$$

— уравнения с разделяющимися переменными, так как после преобразований они приводятся к виду (6):

$$y' = x : \frac{1}{\sin y}; \quad y' = \frac{\ln x}{x} : \frac{e^y}{y}; \quad y' = \frac{1}{\cos x} : \frac{1}{y^3 + 7}.$$

Заметим, что при таких преобразованиях могут быть потеряны некоторые решения дифференциального уравнения. Аккуратное исследование этих случаев довольно сложно, и мы не будем на этом останавливаться.

Для решения уравнения (6) поступим следующим образом. Так как

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

(см. формулу (10) гл. II), то (6) можно переписать в виде

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)},$$

откуда следует, что

$$g(y)\,dy = f(x)\,dx. \tag{7}$$

При этом говорят, что в уравнении (6) переменные разделились (т. е. попросту в одной стороне равенства участвует только одна переменная, а в другой — другая). В равенстве (7) справа стоит дифференциал от функции $\int f(x)\,dx$, слева стоит дифференциал от функции $\int g(y)\,dy$, поэтому

$$\int g(y)\,dy = \int f(x)\,dx. \tag{8}$$

Так как, по определению интеграла, не существует иных функций, имеющих эти дифференциалы, то (8) дает все решения уравнения (6), и при этом говорят, что решение это записано в квадратурах. Вычисляя интегралы, получаем уравнение вида

$$G(y) = F(x) + C, \tag{9}$$

где $G(y)$ есть первообразная для $g(y)$, а $F(x)$ — для $f(x)$. Про это равенство говорят, что оно задает решения уравнения (6) в неявном виде. Находя y из (9), получаем решения уравнения (6) в виде

$$y = \Phi(x;\ C). \tag{10}$$

Как видно, получается целый набор функций — каждому значению C будет соответствовать решение.

Мы разобрали самый простой случай решения дифференциального уравнения первого порядка с разделяю-

щимися переменными и не будем касаться остальных случаев.

Решим для примера дифференциальное уравнение:

$$3y^2y' = 2x(y^3+1), \ x>0, \ y>0.$$

Разделяем переменные:

$$3y^2\frac{dy}{dx} = 2x(y^3+1),$$

откуда

$$\frac{3y^2\,dy}{1+y^3} = 2x\,dx.$$

Переменные разделились — интегрируем:

$$\int\frac{3y^2\,dy}{1+y^3} = \int 2x\,dx \text{ или } \ln(1+y^3) = x^2 + C.$$

Последнее равенство дает все решения в неявном виде. Из него получаем все решения:

$$y = \sqrt[3]{e^{x^2+C}-1}.$$

Рассмотрим еще такую задачу. Имеется цилиндрический бак высоты H с площадью основания S. В дне бака имеется отверстие с площадью s. Если бак налит доверху, то вся вода вытекает через донное отверстие за 20 минут. Спрашивается: за сколько времени вытечет вся вода из бака, если он был наполнен до половины? Пусть x (рис. 81) показывает уровень воды в баке. В каждый момент времени t вода находится на определенном уровне x, т. е. x есть функция от t: $x = x(t)$. Рассмотрим промежуток от t до $t+dt$. За это время часть воды Q вытекла из бака, и уровень воды понизился на dx. Это количество воды равно объему, показанному на рис. 81 (в разрезе):

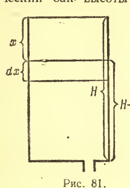


Рис. 81.

$$Q = S\,dx. \tag{11}$$

С другой стороны, Q есть объем жидкости, вытекающей из бака со скоростью $v=k\sqrt{H-x}$ (как известно из физики) за время dt через отверстие площади s; поэтому

$$Q=s\cdot k\sqrt{H-x}\,dt \qquad (12)$$

(здесь мы пренебрегаем тем, что при понижении уровня воды на dx скорость вытекания несколько меняется). Из (11) и (12) получаем дифференциальное уравнение

$$S\,dx=s\cdot k\sqrt{H-x}\,dt,$$

из которого и находим, разделяя переменные, неизвестную функцию:

$$\frac{dx}{\sqrt{H-x}}=\frac{sk}{S}\,dt,$$

откуда

$$\int\frac{dx}{\sqrt{H-x}}=\int\frac{sk}{S}\,dt, \text{ или } -2\sqrt{H-x}=\frac{sk}{S}\,t+C, \qquad (13)$$

и находим x:

$$x=H-\left(\frac{sk}{2S}\,t+\frac{1}{2}\,C\right)^2. \qquad (14)$$

Теперь воспользуемся оставшимися в задаче данными. Будем отсчитывать время с момента открытия донного отверстия; так как при $t=0$ бак полон, то $x=0$ при $t=0$. Тогда из уравнения (13)

$$C=-2\sqrt{H},$$

и формула (14) примет вид

$$x=H-\left(\frac{sk}{2S}\,t-\sqrt{H}\right)^2. \qquad (15)$$

Воспользуемся теперь тем, что за 20 минут выливается вся вода — это значит, что при $t=20$ бак будет пуст, т. е. $x=H$ при $t=20$. Подставляя эти значения t и x в уравнение (15), получаем

$$H=H-\left(\frac{sk}{2S}\cdot 20-\sqrt{H}\right)^2,$$

откуда

$$\frac{sk}{2S}=0{,}05\sqrt{H}.$$

Теперь, подставляя найденное значение для $sk/2S$ в формулу (15), получаем простую зависимость x от t:

$$x = H - H\,(0{,}05t - 1)^2. \qquad (16)$$

Для решения задачи остается подсчитать время t_1, необходимое для того, чтобы уровень воды в баке опустился от $x=0$ до $x=\frac{1}{2}H$. Из (16), учитывая, что $t<20$, находим

$$t = (1 - \sqrt{1 - x/H})\,20,$$

откуда

$$t_1 = \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\frac{1}{2}H}{H}}\right) 20 = (1 - \sqrt{1/2})\,20.$$

Следовательно, время, за которое вытекает вся вода из бака, наполненного до половины, равно

$$20 - t_1 = 20 - (1 - \sqrt{1/2})\,20 = 20\sqrt{1/2} \approx 14,$$

что вполне согласовано с нашими физическими представлениями: искомое время должно быть больше 10 минут, так как вода сначала вытекает быстрее, а потом — медленнее.

§ 2. Некоторые общие сведения из теории

Познакомимся с основными свойствами решений уравнения

$$y' = f(x;\ y). \qquad (17)$$

Прежде всего может оказаться, что правая часть уравнения (17) имеет смысл вовсе не для всех пар $(x;\ y)$. Например, в уравнении

$$y' = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \qquad (18)$$

правая часть имеет смысл только для таких пар $(x;\ y)$, для которых $1 \geqslant x^2 + y^2$ (т. е. для тех точек $(x;\ y)$ на плоскости, расстояния которых от начала координат меньше единицы, см. рис. 82). При этом говорят, что уравнение (17) определено в некоторой области (для уравне-

ния (18) эта область есть круг радиуса 1 с центром в начале координат). Для простоты мы будем предполагать, что функция $f(x; y)$ (правая часть уравнения (17)) определена всюду. Если функция $y=\varphi(x)$ есть решение уравнения (17), то график этой функции (коротко говорят:

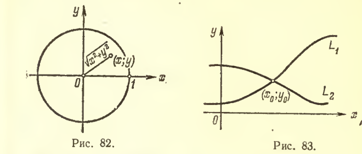


Рис. 82.

Рис. 83.

график решения дифференциального уравнения) называется *интегральной линией уравнения* (17). Если мы возьмем на плоскости точку (x_0, y_0), а решение $y=\varphi(x)$ таково, что $y_0=\varphi(x_0)$ (т. е. интегральная линия проходит через точку $(x_0; y_0)$), то говорят, что *решение проходит через точку* $(x_0; y_0)$.

Теперь сформулируем основное свойство решений: при некоторых условиях, наложенных на правую часть уравнения (17), через любую точку на плоскости проходит ровно одно решение этого уравнения. Отсюда, в частности, следует, что решения уравнения (17) не могут ни пересекаться (рис. 83), ни касаться. Таким образом, уравнение (17) имеет бесконечно много решений, и на плоскости нет точек, через которые не проходило бы какое-нибудь решение.

Если решение уравнения (17) $y=\varphi(x)$ проходит через точку $(x_0; y_0)$, то говорят, что $y=\varphi(x)$ есть *частное решение уравнения* (17), соответствующее начальным условиям $x=x_0$ и $y=y_0$. Поэтому основное свойство решений уравнения (17) можно переформулировать так: для любых начальных условий существует единственное решение уравнения (17), соответствующее этим начальным условиям.

Взглянем теперь на дифференциальные уравнения с точки зрения геометрии. Решение дифференциального уравнения есть линия L — интегральная линия заданного уравнения. Что же означает уравнение (17) для этой линии?

Интегральная линия уравнения (17) есть график некоторого решения $y = \varphi(x)$ этого уравнения, т. е. такой функции, для которой

$$\varphi'(x) = f(x;\ \varphi(x)) \qquad (19)$$

для всех x (по определению решения). Возьмем точку $(x_0;\ y_0)$ на L. Для этой точки равенство (19) примет вид

$$\varphi'(x_0) = f(x_0;\ y_0),$$

где

$$y_0 = \varphi(x_0). \qquad (20)$$

Но $\varphi'(x_0)$ есть угловой коэффициент касательной, проведенной к L в точке $(x_0;\ y_0)$.

Таким образом, можно себе представить следующую геометрическую картину: берем точку $(x_0;\ y_0)$ на плоскости, через эту точку проходит решение заданного дифференциального уравнения; это решение имеет график — интегральную линию L заданного уравнения (рис. 84); у линии L в рассматриваемой точке имеется касательная, угловой коэффициент которой k в силу формулы (20) равен

$$k = \varphi'(x_0) = f(x_0;\ y_0).$$

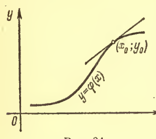


Рис. 84.

Следовательно, в каждой точке плоскости можно установить положение касательной к решению уравнения (17), проходящему через эту точку, не решая этого уравнения.

Представим себе теперь, что эти касательные нарисованы в каждой точке плоскости (не целиком, но из каждой касательной оставлен только отрезок, содержащий точку касания). Тогда получится чертеж вроде рис. 85, который называется *полем направлений*, задаваемым уравнением (17). Таким образом, каждое дифференциальное уравнение вида (17) задает на плоскости поле направлений. А интегральные линии заданного уравнения должны быть таковы, чтобы в каждой точке они касались направления, указанного полем в этой точке (рис. 86).

Из этих геометрических соображений около двухсот лет назад Эйлером был предложен метод приближенного

решения дифференциальных уравнений (17). В этом методе строится так называемая ломаная Эйлера, приближенно дающая интегральную линию.

Делается это так. Возьмем точку $(x_0; y_0)$. В этой точке заданным уравнением определено некоторое направление

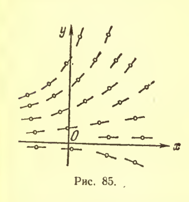


Рис. 85.

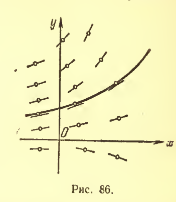


Рис. 86.

(указанное полем направлений). Возьмем отрезок длины h с этим направлением и левым концом в точке $(x_0; y_0)$ (рис. 87). Правый конец этого отрезка есть некоторая точка $(x_1; y_1)$. С ней проделаем то же самое: возьмем отрезок длины h с левым концом в точке $(x_1; y_1)$, имеющий направление, определяемое в ней полем. Правый конец этого отрезка есть некоторая точка $(x_2; y_2)$. В ней делаем то же построение, получаем следующую точку $(x_3; y_3)$ и т. д. Оказывается, что ломаные Эйлера тем ближе к интегральной линии, проходящей через точку $(x_0; y_0)$, чем меньше h. Таким образом, ломаные Эйлера дают приближенные решения уравнений,

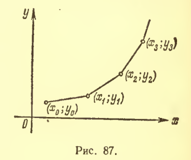


Рис. 87.

и точность этого решения может быть сделана как угодно большой.

Если дифференциальное уравнение содержит старшие производные, то оно называется *дифференциальным урав-*

нением высшего порядка. Говорят, что задано дифференциальное уравнение n-го порядка, если в этом уравнении содержится производная порядка n и нет производных большего порядка. Так, уравнение

$$y \ln (x + y'') - \sin (y' - 5 \operatorname{arctg} y) = 0$$

есть дифференциальное уравнение второго порядка; уравнение

$$xe^y + \sin (y''' + y^{V}) = 1/\sqrt{x^2+3}$$

есть уравнение пятого порядка. Почти все, что было сказано о дифференциальных уравнениях первого порядка, сохраняется для дифференциальных уравнений высших порядков.

Определение 20. Уравнение вида

$$F(x;\ y;\ y';\ \ldots;\ y^{(n)}) = 0, \tag{21}$$

или

$$y^{(n)} = f(x;\ y;\ y';\ \ldots;\ y^{(n-1)}),$$

где y есть неизвестная функция от x, называется *дифференциальным уравнением n-го порядка*.

Определение 21. Функция $y = \varphi(x)$ называется *решением дифференциального уравнения* (21) на интервале $(a;\ b)$, если

$$F(x;\ \varphi(x);\ \varphi'(x);\ \ldots;\ \varphi^{(n)}(x)) = 0,$$

или

$$\varphi^{(n)}(x) = f(x;\ \varphi(x);\ \varphi'(x);\ \ldots;\ \varphi^{(n-1)}(x))$$

для всех x из $(a;\ b)$ (коротко говорят: $y = \varphi(x)$ обращает уравнение в тождество).

Определение 18 сохраняется для дифференциальных уравнений высших порядков. Простейшим дифференциальным уравнением n-го порядка будет уравнение

$$y^{(n)} = f(x). \tag{22}$$

Покажем на примере, как оно решается. Пусть задано дифференциальное уравнение третьего порядка

$$y''' = e^{2x}. \tag{23}$$

Так как все функции, у которых производная равна e^{2x}, содержатся в формуле (см. определение 13)

$$\int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C_1,$$

то для любого решения уравнения (23) будет

$$y'' = \frac{1}{2}e^{2x} + C_1. \tag{24}$$

Таким образом, мы пришли к уравнению второго порядка — как говорят, понизили порядок уравнения. Это рассуждение коротко принято записывать так:

$$y'' = \int y'''dx = \int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C_1.$$

Из (24) при помощи таких же рассуждений следует:

$$y' = \int y''\,dx = \int\left(\frac{1}{2}e^{2x} + C_1\right)dx = \frac{1}{4}e^{2x} + C_1x + C_2$$

и

$$y = \int y'\,dx = \int\left(\frac{1}{4}e^{2x} + C_1x + C_2\right)dx = \frac{1}{8}e^{2x} + C_1x^2 + C_2x + C_3.$$

В этой формуле содержатся все решения уравнения (23). Здесь C_1, C_2 и C_3 — произвольные постоянные. При этом, чтобы не загромождать вычислений, не пишут $\frac{1}{2}C_1$ и т.п., так как при произвольном C_1 произвольно будет и $\frac{1}{2}C_1$.

Для того чтобы сформулировать основное свойство решений дифференциального уравнения (21), определим для этого уравнения начальные условия.

Определение 22. *Начальными условиями* для дифференциального уравнения n-го порядка называется набор из $n+1$ чисел

$$x_0;\ y_0;\ y_0';\ \ldots;\ y_0^{(n-1)}. \tag{25}$$

Определение 23. Если для решения $y = \varphi(x)$ уравнения (21) выполнены равенства

$$y_0 = \varphi(x_0),\ \ y_0' = \varphi'(x_0),\ \ \ldots,\ \ y_0^{(n-1)} = \varphi^{(n-1)}(x_0),$$

то говорят, что это решение *соответствует начальным условиям* (25).

После этого формулировка основного свойства решений дифференциального уравнения сохраняется дословно: при любых начальных условиях второе уравнение из (21) имеет единственное решение.

Описательно про это свойство можно сказать: второе дифференциальное уравнение из (21) имеет бесконечно много решений и через любую точку $(x_0; y_0)$ на плоскости проходит график некоторого решения, причем это решение можно подобрать таким, что первые $n-1$ производных этого решения в точке x_0 заданы заранее произвольным образом (т. е. это — любые числа).

§ 3. Уравнения второго порядка

Простейшими, и вместе с тем наиболее важными, из уравнений высших порядков являются дифференциальные уравнения второго порядка. В этом параграфе мы познакомимся с некоторыми общими свойствами решений дифференциального уравнения второго порядка

$$y'' = f(x;\ y;\ y') \qquad (26)$$

и найдем общее решение такого уравнения для одного важного частного случая.

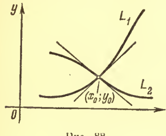


Рис. 88.

Начальными условиями для этого уравнения будет набор из трех чисел: x_0, y_0 и y'_0. Решение $y = \varphi(x)$ уравнения (26) соответствует этим начальным условиям, если

$$y_0 = \varphi(x_0) \text{ и } y'_0 = \varphi'(x_0). \qquad (27)$$

Геометрически равенства (27) означают, что через точку $(x_0;\ y_0)$ проходит график этого решения — интегральная линия уравнения (26), и касательная к этой линии имеет угловой коэффициент, равный y'_0. Основное свойство решений геометрически означает следующее: для любой точки плоскости и для любой прямой, проходящей через эту точку, можно указать решение уравнения (26), график которого проходит через эту точку и касается этой прямой. Такое решение существует только одно. Из этого,

в частности, следует, что через каждую точку плоскости (в отличие от уравнений первого порядка) проходит бесконечно много решений — для каждого «направления» по решению (но касаться они по-прежнему не могут) (рис. 88).

Особенно часто приходится иметь дело с так называемыми линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами — это уравнения вида

$$y'' + py' + qy = f(x), \tag{28}$$

где p и q — числа. Если $f(x) = 0$ для всех x, то решение получается очень просто. Для уравнения (28) составляется *характеристическое уравнение*

$$r^2 + pr + q = 0, \tag{29}$$

т. е. квадратное алгебраическое уравнение относительно неизвестного r. Это уравнение получается из уравнения (28) при замене y'' на r^2, y' — на r и y — на 1. Тогда имеет место следующая теорема:

Теорема 33. *Пусть дано дифференциальное уравнение*

$$y'' + py' + qy = 0. \tag{30}$$

1) *Если корни характеристического уравнения r_1 и r_2 действительны и различны, то все решения уравнения* (30) *даются формулой*

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}. \tag{31}$$

2) *Если корни характеристического уравнения $r_1 = r_2 = r$, то все решения уравнения* (30) *даются формулой*

$$y = (C_1 x + C_2) e^{rx}. \tag{32}$$

3) *Если корни характеристического уравнения $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ — мнимые числа ($\beta \neq 0$), то все решения уравнения* (30) *даются формулой*

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x). \tag{33}$$

Поскольку других возможностей для корней характеристического уравнения нет, то теорема 30 дает решения уравнения (30) во всех случаях.

Прежде чем доказывать теорему, приведем несколько примеров, показывающих простоту решения дифференциальных уравнений при помощи этой теоремы.

1. $y''-2y'-3y=0$, характеристическое уравнение

$$r^2-2r-3=0;\quad r_1=-1,\quad r_2=3.$$

Следовательно, решения уравнения (30) имеют вид

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}.$$

2. $y''+4y'+4y=0$, характеристическое уравнение

$$r^2+4r+4=0,\ r_{1,2}=-2.$$

Следовательно, решения уравнения (30) имеют вид

$$y=(C_1x+C_2)\,e^{-2x}.$$

3. $y''-4y'+13y=0$, характеристическое уравнение

$$r^2-4r+13=0,\ r_{1,2}=2\pm 3i.$$

Следовательно, решения уравнения (30) имеют вид

$$y=e^{2x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x).$$

Для решения уравнения (30) введем новую неизвестную функцию $u(x)$, положив

$$y=ue^{ax},\tag{34}$$

где a — некоторое число, которое мы подберем по ходу решения. Вычислим $y'=u'e^{ax}+aue^{ax}$ и $y''=u''e^{ax}+2au'e^{ax}+a^2ue^{ax}$ и подставим их в уравнение (30):

$$u''e^{ax}+2au'e^{ax}+a^2ue^{ax}+p\,(u'e^{ax}+aue^{ax})+que^{ax}=0.$$

На общий множитель e^{ax}, который отличен от нуля для всех x, можно сократить, после чего получаем

$$u''+(2a+p)\,u'+(a^2+pa+q)\,u=0.\tag{35}$$

Теперь будем подбирать a. Для этого заметим, что коэффициент при u в (35) есть левая часть характеристического уравнения (29), где вместо r подставлено a. Поэтому если для случая 2) положить $a=r$ и учесть, что по теореме Виета $p=-2r=-2a$, то (35) примет вид $u''=0$, откуда $u=C_1x+C_2$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Подставляя в (34) $a=r$ и найденное значение $u(x)$, получаем (32).

Для случая 1) тоже положим $a=r_1$. Тогда, поскольку $p=-(r_1+r_2)$, (35) примет вид

$$u''+(r_1-r_2)\,u'=0,\ \text{или}\ (u'+(r_1-r_2)\,u)'=0,$$

откуда

$$u' + (r_1 - r_2)\, u = C.$$

Мы получили дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными — решаем его, положив $C = (r_1 - r_2)\, C_1$ (так как $r_1 - r_2 \neq 0$, то C_1 — также произвольная постоянная):

$$\int \frac{du}{u - C_1} = \int (r_2 - r_1)\, dx,\ \ \ln|u - C_1| = (r_2 - r_1)\, x + B,$$

$$|u - C_1| = e^{(r_2 - r_1)\, x + B},$$

где B — произвольная постоянная. Поскольку $e^{(r_2 - r_1)\, x + B} \neq 0$ для всех x, то и функция $u - C_1 \neq 0$ для всех x и потому сохраняет постоянный знак, так что

$$u - C_1 = C_2 e^{(r_2 - r_1)\, x},\ \ u = C_1 + C_2 e^{(r_2 - r_1)\, x}.$$

Подставляя в (34) $a = r_1$ и найденную функцию u, получаем (31).

Для случая 3) положим $a = \alpha = -\frac{p}{2}$, чтобы уничтожить коэффициент при u' в (35). Тогда, поскольку по теореме Виета $p = -2\alpha$ и $q = \alpha^2 + \beta^2$, коэффициент при u в (35) равен $\alpha^2 + (-2\alpha)\,\alpha + \alpha^2 + \beta^2 = \beta^2$ и уравнение (35) при $a = \alpha$ принимает вид

$$u'' + \beta^2 u = 0, \quad \beta \neq 0. \tag{36}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что функция

$$u = C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x, \tag{37}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, есть решение уравнения (36) для всех x. Докажем теперь, что других решений уравнение (36) не имеет, т. е. формула (37) дает полное решение этого уравнения. Действительно, пусть $g(x)$ есть решение уравнения (36) для всех x [1]). Тогда функция

$$\varphi(x) = g(x) - g(0) \cos \beta x - \frac{g'(0)}{\beta} \sin \beta x \tag{38}$$

[1]) Если предполагать, что $g(x)$ есть решение уравнения (36) только на некотором интервале $(a;\ b)$, то доказательство несколько усложнится.

тоже есть решение уравнения (36) для всех x (что легко проверить, вычислив φ''), т. е.

$$\varphi''+\beta^2\varphi=0 \quad \text{для всех } x \tag{39}$$

и, кроме того,

$$\varphi(0)=0 \quad \text{и} \quad \varphi'(0)=0. \tag{40}$$

Умножим обе части (39) на $2\varphi'$:

$$2\varphi'\varphi''+\beta^2 2\varphi\varphi'=0 \text{ или } (\varphi'^2+\beta^2\varphi^2)'=0$$

для всех x. Следовательно,

$$\varphi'^2+\beta^2\varphi^2=C \quad \text{для всех } x. \tag{41}$$

Подставим в это равенство $x=0$:

$$C=\varphi'^2(0)+\varphi^2(0)\beta^2=0$$

в силу (40). Таким образом, в (41) $C=0$, и (41) принимает вид

$$\varphi'^2+\beta^2\varphi^2=0 \quad \text{для всех } x,$$

откуда следует, что $\beta^2\varphi^2=0$, т. е. $\varphi=0$ для всех x (поскольку $\beta\neq 0$). Подставляя найденное значение φ в (38), находим, что

$$g(x)=g(0)\cos\beta x+\frac{g'(0)}{\beta}\sin\beta x \quad \text{для всех } x,$$

т. е. решение $g(x)$ содержится в формуле (37) при $C_1=g(0)$ и $C_2=g'(0)/\beta$.

Подставляя в (34) $a=\alpha$ и найденную функцию $u(x)$ из (37), получаем (33).

Теорема 33 полностью доказана.

Рассмотрим для примера задачу о колебаниях. На горизонтальной пружине закреплен груз массы m. Изучим колебания этого груза, если известно, что на груз, отведенный от положения равновесия на x, действует сила сопротивления пружины $F=kx$. Чтобы не осложнять вычисления, мы не будем учитывать остальных сил, действующих на эту систему, а груз примем за материальную точку.

Направим ось Ox по оси пружины (рис. 89) и начальную точку отсчета поместим в точке равновесия груза. Тогда x есть путь, пройденный грузом. Так как в каждый

момент времени t груз занимает определенное положение x, то x есть функция от t, $x=x(t)$. Эту известную функцию надо найти и по ней изучить движение груза.

Составим уравнение движения груза, пользуясь вторым законом Ньютона:

$$ma=F, \tag{42}$$

где a — ускорение груза $\left(\text{в нашем случае оно равно } x''=\frac{d^2x}{dt^2}\right.$ (см. гл. II, стр. 53)$\Big)$, а F — суммарная сила, действующая на груз (в нашем случае $F=-kx$, $k>0$, а знак минус указывает на то, что сила сопротивления пружины направлена от груза к началу координат: если $x>0$, то сила направлена в сторону отрицательных x, если $x<0$, то сила направлена в сторону положительных x). Подставляя найденные значения силы и ускорения в уравнение (42), получаем уравнение движения груза

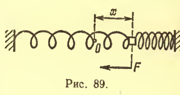


Рис. 89.

$$mx''=-kx, \quad \text{или} \quad x''+\frac{k}{m}x=0. \tag{43}$$

Это — уравнение типа (30), и мы находим его решения по теореме 33: составляем характеристическое уравнение

$$r^2+(k/m)=0, \quad r_{1,2}=\pm\sqrt{-k/m}=\pm i\sqrt{k/m};$$

его корни — мнимые, так как k, $m>0$, следовательно, мы должны пользоваться третьим случаем, и решения записываются в виде

$$x=C_1\cos\left(t\sqrt{k/m}\right)+C_2\sin\left(t\sqrt{k/m}\right), \tag{44}$$

или, по-другому:

$$x=A\sin\left(t\sqrt{k/m}+B\right), \tag{45}$$

где A и B — произвольные постоянные.

Из этого решения видно, что груз совершает колебания около точки равновесия O с амплитудой A. Это, впрочем, и так было ясно из физических соображений. Но формула (45) дает гораздо больше. Прежде всего, она

показывает, что период T этих колебаний равен

$$T = 2\pi \sqrt{m/k}. \tag{46}$$

Некоторые выводы о движении груза можно было бы сделать и без этой формулы. Ясно, например, что с увеличением массы груза колебания его будут медленнее, т. е. период колебаний увеличится. Но как? Только формула (46) может объяснить, почему с увеличением массы груза в 4 раза период колебаний увеличивается только в 2 раза, а не иначе. Точно так же ясно, что с увеличением жесткости пружины (увеличением k) колебания груза будут протекать быстрее — период колебаний T уменьшится. Но как? Опять-таки только формула (46) может объяснить, почему с увеличением жесткости пружины в 4 раза период колебаний уменьшится только в 2 раза, а не иначе.

Ряд задач о движении этого груза вообще не может быть решен без формулы (45). Из физических соображений ясно, что если мы выведем груз из состояния равновесия до положения x_0 и отпустим, то начнутся колебания с амплитудой x_0. Это легко получить и из уравнения (45). Но что будет, если мы еще и подтолкнем груз в ту или иную сторону? Какова будет амплитуда колебаний? Здесь ответ можно получить только из формул.

Разберем простейший случай. В начальный момент времени $t = 0$ груз находился в положении равновесия, $x(0) = 0$, и мы его подтолкнули, т. е. сообщили некоторую скорость v_0. Начались колебательные движения. Каковы они? Нас интересует такое решение $x(t)$, для которого $x'(0) = v_0$ (так как x'_t есть скорость, см. гл. II, стр. 45). Таким образом, из всех решений (45) уравнения движения (43) нам надо выбрать (подобрав произвольные постоянные A и B) такое, что

$$x(0) = A \sin B = 0 \quad \text{и} \quad x'(0) = A\sqrt{k/m} \cos B = v_0.$$

Решая эту систему уравнений, получаем

$$B = 0 \quad \text{и} \quad A = v_0\sqrt{m/k}.$$

Подставив найденные значения A и B в (45), получим

$$x = v_0\sqrt{m/k} \sin\left(t\sqrt{k/m}\right),$$

откуда видно, что амплитуда колебаний равна $v_0\sqrt{m/k}$.

Мы рассмотрели простейший случай уравнения (28) — однородное уравнение, $f(x)=0$. Если $f(x)\neq 0$, то оказывается, что все его решения можно найти так: найдем какое-нибудь решение $\bar{y}=\bar{y}(x)$ этого уравнения; найдем затем все решения $y=\varphi(x, C_1, C_2)$ соответствующего однородного уравнения (в заданном уравнении $f(x)$ заменяется нулем); тогда

$$y=\varphi(x, C_1, C_2)+\bar{y}(x) \tag{47}$$

дает все решения указанного уравнения.

Решение $\bar{y}$ часто можно найти подбором. Решим, например, уравнение

$$y''-3y'+2y=e^{-x}. \tag{48}$$

Соответствующее однородное уравнение будет

$$y''-3y'+2y=0, \tag{49}$$

его характеристическое уравнение

$$r^2-3r+2=0, \quad r_1=1, \quad r_2=2,$$

так что все решения однородного уравнения (49) будут

$$y=\varphi(x, C_1, C_2)=C_1e^x+C_2e^{2x}.$$

Подбор решения $\bar{y}$ неоднородного уравнения (48) делается из следующих соображений. Производные от Ae^{-x} — снова функции того же вида. Попробуем подобрать коэффициент A так, чтобы функция

$$\bar{y}=Ae^{-x} \tag{50}$$

удовлетворяла заданному уравнению. Поскольку

$$\bar{y}=Ae^{-x}, \quad \bar{y}'=-Ae^{-x}, \quad \bar{y}''=Ae^{-x},$$

то после подстановки этих выражений в уравнение (49) для определения неизвестного (говорят, неопределенного) коэффициента A получаем уравнение

$$Ae^{-x}-3(-Ae^{-x})+2Ae^{-x}=e^{-x},$$

откуда $6Ae^{-x}=e^{-x}$, и так как $e^{-x}\neq 0$, то $A=\frac{1}{6}$.

Подставляя найденное значение A в (50), получаем

$$\bar{y}=\frac{1}{6}e^{-x}.$$

Следовательно, все решения заданного уравнения (48) будут

$$y=C_1e^x+C_2e^{2x}+\frac{1}{6}e^{-x}.$$

Обратите внимание на то, что решение $\bar{y}$ было того же вида, что и правая часть уравнения (48). Этот прием применим и в том случае, если правая часть заданного уравнения есть многочлен или несложная комбинация синусов и косинусов.

Несколько сложнее получить решение в случае *резонанса* — это случай, когда правая часть есть решение соответствующего однородного уравнения. В большинстве случаев удается найти $\bar{y}$ при помощи введения дополнительного множителя x. Поясним это на примере решения уравнения

$$y''+y=\sin x. \tag{51}$$

Соответствующее однородное уравнение будет

$$y''+y=0; \tag{52}$$

его характеристическое уравнение

$$r^2+1=0, \quad r_{1,2}=\pm i,$$

и, следовательно, все решения уравнения (52) даются формулой

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x. \tag{53}$$

Легко видеть, что правая часть заданного уравнения (51) есть решение соответствующего однородного уравнения (52) — это случай резонанса. Поэтому решение $\bar{y}$ уравнения (51) ищем в виде

$$\bar{y}=x(A\cos x+B\sin x). \tag{54}$$

Подберем неопределенные коэффициенты A и B так, чтобы взятая функция $\bar{y}$ была решением заданного уравнения (51). Так как

$$\bar{y}''=-x(A\cos x+B\sin x)+2(-A\sin x+B\cos x),$$

то после подстановки $\bar{y}$ в заданное уравнение (51) получаем

$$-x(A\cos x+B\sin x)+2(-A\sin x+B\cos x)+ \\ +x(A\cos x+B\sin x)=\sin x,$$

или

$$-2A\sin x+2B\cos x=\sin x.$$

Для того чтобы взятая функция была решением заданного уравнения, последнее равенство должно выполняться при всех x; для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$B=0 \quad \text{и} \quad A=-1/2.$$

Подставляя найденные значения A и B в формулу (54), получаем

$$\bar{y}=-\frac{x}{2}\cos x,$$

и, следовательно, все решения заданного уравнения даются формулой

$$y=(C_1-x/2)\cos x+C_2\sin x. \tag{55}$$

Для примера решим немного более сложную задачу о колебаниях: добавим «раскачивающую силу» $F_1=\sin t$. Тогда, как известно из физики, если период колебаний груза и период «раскачивающей силы» совпадают, то наступает явление резонанса — амплитуда колебаний груза неограниченно возрастает (хотя раскачивающая сила может быть и очень маленькой). Посмотрим, как это скажется на уравнении движения системы и на его решениях. Сохраним все обозначения предыдущей задачи. Тогда в уравнении (42) $F=-kx+\sin t$ и уравнение движения для груза будет иметь вид

$$mx''=-kx+\sin t, \tag{56}$$

что выводится так же, как уравнение (43). Рассмотрим частный случай, когда $m=k=1$. Тогда уравнение примет вид

$$x''+x=\sin t, \tag{57}$$

а это уравнение уже решено (см. (55)):

$$x=\left(C_1-\frac{1}{2}t\right)\cos t+C_2\sin t. \tag{58}$$

Собственные колебания груза, соответствующие колебанию при отсутствии «раскачивающей силы», даются решением соответствующего однородного уравнения

$$x'' + x = 0,$$

которое в силу (53) имеет вид

$$x = C_1 \cos t + C_2 \sin t.$$

Период собственных колебаний груза здесь равен 2π. Следовательно, он совпадает с периодом «раскачивающей силы» $F_1 = \sin t$, и мы имеем дело со случаем резонанса.

Из формулы (58) мы действительно видим, что амплитуда колебаний груза неограниченно возрастает вместе со временем t. Кроме того, разобранный пример поясняет, почему некоторые случаи решения дифференциальных уравнений носят такое «физическое название» — случай резонанса (см. стр. 128).

ПРИЛОЖЕНИЕ

§ 1. Действительные числа

Для того чтобы можно было доказывать более тонкие теоремы математического анализа, надо подробнее описать свойства действительных чисел. Действительные числа — это обобщение рациональных чисел. Это значит, что 1) рациональные числа есть частный случай действительных чисел, т. е. множество рациональных чисел есть часть множества действительных чисел, и что 2) в множестве действительных чисел можно делать все операции, которые можно делать в множестве рациональных чисел, т. е. любые два действительных числа можно сложить, вычесть, умножить и разделить (если делитель не нуль), можно писать для них равенства и неравенства, и все эти действия подчиняются тем же законам, что и для рациональных чисел.

Кроме того, множество действительных чисел обладает еще одним свойством, отличающим это множество от множества рациональных чисел. Это — свойство непрерывности. Для этого свойства существует много разных формулировок; приведем одну из них.

Пусть множества A и B состоят из действительных чисел. Тогда если для любых a из A и b из B выполняется неравенство $a \leqslant b$, то существует такое действительное число c, что $a \leqslant c \leqslant b$ для любых a и b.

Позднее этому свойству будет дано наглядное геометрическое истолкование.

Отметим сразу, что множество рациональных чисел этим свойством не обладает. Действительно, пусть множество A состоит из рациональных чисел $a > 0$, для которых $a^2 < 2$, а множество B состоит из рациональных чисел $b > 0$, для которых $b^2 > 2$. Очевидно, для чисел a из A и b из B выполняются неравенства $a \leqslant b$. Покажем, что, несмотря на это, нет рационального числа c такого, что

$a \leqslant c \leqslant b$ для всех a и b. Этим будет доказано, что множество рациональных чисел не обладает свойством непрерывности.

Доказательство проведем от противного. Пусть такое число c существует. Очевидно, что $c > 1$ и $c^2 \neq 2$ (как это доказывалось в школе). Если $c^2 < 2$, то $h = 2 - c^2$ удовлетворяет неравенствам $0 < h < 1$, а рациональное число $d = c + \frac{h}{4c} > c$. Но $d^2 < 2$ $\left[d^2 = \left(c + \frac{h}{4c}\right)^2 = c^2 + \frac{h}{2} + \frac{h^2}{16c^2} = c^2 + \frac{h}{2} + \frac{h}{16} \cdot h \cdot \frac{1}{c^2} < c^2 + \frac{h}{2} + \frac{h}{16} < 2\right]$, так что d принадлежит A. Но тогда $d \leqslant c$, а это противоречит тому, что, $d > c$. Если $c^2 > 2$, то, проведя аналогичные рассуждения, снова приходим к противоречию. Таким образом, предположение «число c существует» приводит нас к противоречию. Следовательно, такого числа c не существует.

Естественно возникает вопрос, зачем нужны действительные числа, а может быть, достаточно рациональных чисел?

На этот вопрос ответ был дан еще Пифагором, обнаружившим, что диагональ квадрата несоизмерима с его стороной, так что если ограничиться рациональными числами и взять квадрат со стороной, равной единице, то его диагональ не будет иметь длины.

Ясно, что такое положение очень неудобно, — надо, чтобы каждый отрезок имел определенную длину. Имея же в распоряжении действительные числа, мы можем измерить любой отрезок. В самом деле, любой отрезок мы можем измерить с недостатком с точностью до 0,1, 0,01, 0,001 и т. д.; полученные числа отнесем к множеству A. Этот же отрезок мы можем измерить с избытком с точностью до 0,1, 0,01, 0,001 и т. д.; полученные числа отнесем к множеству B. Ясно, что $a \leqslant b$ для любых чисел a из A и b из B. По свойству непрерывности множества действительных чисел существует такое число c (в данном случае единственное), что $a \leqslant c \leqslant b$ для любых a и b. Это число c и называется длиной взятого отрезка.

Таким же способом в результате любого измерения получается действительное число. Грубо говоря, если есть единица измерения, которую можно неограниченно делить, то при помощи действительных чисел можно измерить любую величину.

Для многих задач очень удобно геометрическое изображение действительных чисел на числовой прямой. Возьмем прямую и отметим на ней точку O, которую будем называть началом отсчета и которая будет изображать число нуль (рис. 90). Возьмем любую точку L, лежащую на прямой справа от точки O. Длина отрезка OL есть некоторое положительное действительное число x (каждый отрезок имеет длину, как мы видели выше); условимся, что точка L изображает это число x. Пусть точка L', симметричная L относительно точки O, изображает число $-x$. Таким образом, каждая точка прямой изображает некоторое действительное

Рис. 90.

Рис. 91.

число — положительное, если точка лежит справа от O, и отрицательное, если точка лежит слева от O. Ясно, что при этом каждое действительное число будет изображаться некоторой точкой на прямой. В дальнейшем мы не будем различать числа и точки, которые изображают эти числа: говоря «число», будем иметь в виду и ту точку прямой, которая изображает это число; говоря «точка», будем иметь в виду и то число, которое изображается взятой точкой.

Теперь можно просто проиллюстрировать свойство непрерывности множества действительных чисел. Каждая точка a (число) из множества A расположена левее каждой точки b (числа) из множества B. Поэтому множество A (как множество точек на прямой, изображающих числа этого множества) расположено целиком левее множества B. Свойство непрерывности множества действительных чисел утверждает, что между этими множествами A и B есть точка, «отделяющая одно множество от другого» (см. рис. 91, где точку c можно выбрать многими разными способами), — факт геометрически совершенно очевидный.

Отметим некоторые свойства множества действительных чисел. Начнем с примеров. Рассмотрим два множества $P = [0;\ 1]$ и $Q = (-2;\ 3)$. У множества P есть наибольшее число — это 1. А у множества Q наибольшего числа нет. Напрашивается, правда, ответ, что наибольшее число для Q есть 3, но 3 не принадлежит множеству Q, так

что нельзя сказать, что среди чисел, принадлежащих множеству Q, есть наибольшее. Однако число 3 для множества Q «играет роль наибольшего», оно есть обобщение понятия наибольшего числа для множества. Дадим определение:

Верхней гранью числового множества A (коротко обозначается $\sup A$) называется число M такое, что

1) $a \leqslant M$ для любого числа a из множества A;

2) для любого положительного числа ε в множестве A можно найти число a' такое, что $a' > M - \varepsilon$.

Легко видеть, что в случае, когда в множестве A есть наибольшее число $\tilde{a}$, то $\tilde{a} = \sup A$. Поэтому $\sup A$ есть обобщение понятия наибольшего числа числового множества.

Заметим, что числовое множество A не может иметь двух верхних граней (т. е. у числового множества или нет верхней грани, или есть только одна). Докажем это от противного. Предположим, что у числового множества A есть две верхние грани c_1 и c_2, причем $c_1 \neq c_2$. Тогда одно из этих чисел больше, пусть $c_1 > c_2$. Так как c_1 — верхняя грань A, то для положительного числа $\varepsilon = c_1 - c_2$ можно указать число a' из множества A такое, что $a' > c_1 - \varepsilon = c_2$, что противоречит тому, что c_2 есть верхняя грань множества A. Полученное противоречие показывает, что соотношение $c_1 \neq c_2$ невозможно. Этим доказана единственность верхней грани числового множества.

Аналогично обобщается понятие наименьшего числа из числового множества:

Нижней гранью числового множества A (обозначается $\inf A$) называется число m такое, что

1) $a \geqslant m$ для любого числа a из множества A;

2) для любого положительного числа ε в множестве A можно найти число a'' такое, что $a'' < m + \varepsilon$.

Ясно, что если в числовом множестве A есть наименьшее число a, то $a = \inf A$. Нижняя грань числового множества тоже единственна. Для приведенного выше множества Q $\sup Q = 3$, $\inf Q = -2$.

Введем еще следующую терминологию:

1) числовое множество A *ограничено сверху*, если можно указать такое число H, что $a \leqslant H$ для всех чисел a из множества A;

2) числовое множество A *ограничено снизу*, если можно указать такое число h, что $a \geqslant h$ для всех чисел a из множества A;

3) числовое множество A называется *ограниченным*, если оно ограничено и сверху и снизу.

Теорема 1. *Если числовое множество A не пусто и ограничено сверху (снизу), то у него имеется единственная* $\sup A$ ($\inf A$).

Рассмотрим множество B, состоящее из всех чисел b таких, что для любого числа a из множества A будет $a \leqslant b$. Такие числа b существуют, так как множество A ограничено сверху. В силу непрерывности множества действительных чисел существует такое число c, что $a \leqslant c \leqslant b$ для любых чисел a (из A) и b (из B).

Покажем, что $c = \sup A$. По определению c, для всех чисел a из множества A будет $a \leqslant c$, так что первое условие выполнено. Проверим, что выполнено и второе условие. Предположим, что оно не выполнено, т. е. есть такое положительное число r ($r > 0$), что для всех чисел a из множества A будет $a \leqslant c - r$. Так как $c - r < c$, то число $c - r$ не принадлежит множеству B. Но это противоречит определению множества B, которое было множеством всех чисел b таких, что для любого числа a из множества A будет $a \leqslant b$, а мы нашли число $c - r$, тоже обладающее таким же свойством и не принадлежащее множеству B. Полученное противоречие показывает, что для c выполнено и условие 2) из определения верхней грани.

Рассмотрим несколько примеров на применение приведенных выше фактов. Пусть на множестве натуральных чисел n (целых положительных) задана функция $f(n)$ — ее называют последовательностью. Обычно обозначают $f(n) = x_n$ (или a_n и т. п.), а последовательность обозначают $\{x_n\}$.

Дадим определение предела последовательности (которое получается, если проанализировать определение предела функции при $x \to \infty$: $\lim x_n = \lim\limits_{x \to +\infty} f(E(x))$, $E(x)$ — целая часть x).

Число x называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$ (пишут $x = \lim x_n$), если для любого положительного числа ε ($\varepsilon > 0$) можно указать такое число N, зависящее от ε, что

$$|x_n - x| < \varepsilon \text{ для всех } n > N.$$

Теорема 2. *Ограниченная сверху (снизу) монотонно возрастающая (убывающая) последовательность имеет предел.*

Пусть $x_n \leqslant x_{n+1}$ и $x_n \leqslant H$ для всех номеров n. По теореме 1 множество, состоящее из всех членов последовательности, имеет верхнюю грань $x = \sup \{x_n\}$. Другими словами, для любого n будет $x_n \leqslant x$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется n' такое, что $x_{n'} > x - \varepsilon$. Положим $N = n'$. Тогда для всех $n > n'$ будет $x - \varepsilon < x_{n'} \leqslant x_n \leqslant x$, т. е.

$$|x_n - x| < \varepsilon \text{ для всех } n > N,$$

так что $\lim x_n = x$.

В качестве применения этой теоремы установим, что последовательность

$$x_n = (1 + 1/n)^{n+1}$$

имеет предел. Для этого покажем, что она монотонно убывает, откуда в силу теоремы 2 будет следовать существование предела, так как эта последовательность ограничена снизу: $x_n > 1$.

Предварительно выведем неравенство Бернулли: для любого числа $\alpha > -1$ и любого натурального p

$$(1+\alpha)^p \geqslant 1 + p\alpha.$$

Докажем это неравенство методом математической индукции. Для $p = 1$ неравенство очевидно. Пусть неравенство верно для некоторого p; тогда, так как $1 + \alpha > 0$, то

$$(1+\alpha)^{p+1} = (1+\alpha)^p (1+\alpha) \geqslant (1+\alpha p)(1+\alpha) = \\ = 1 + \alpha(p+1) + \alpha^2 p \geqslant 1 + (p+1)\alpha,$$

т. е. оно верно и для $p + 1$. Отсюда в силу принципа математической индукции следует, что неравенство верно для любого натурального p.

Из неравенства Бернулли следует: для любого n

$$x_n = (1 + 1/n)^{n+1} \geqslant 1 + (n+1)/n > 2, \tag{1}$$

$$\frac{x_{n-1}}{x_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}} = \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n+1} \frac{n-1}{n} = \\ = \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1} \frac{n-1}{n} \underset{(*)}{\geqslant} \left(1 + \frac{n+1}{n^2-1}\right) \frac{n-1}{n} = \\ = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) \frac{n-1}{n} = 1;$$

(*) применяем неравенство Бернулли с $p=n+1$ и $\alpha=1/(n^2-1)$.

Следовательно,

$$x_n \leqslant x_{n-1}.$$

Таким образом, последовательность $\{x_n\}$ монотонно убывает и ограничена снизу. По теореме 2 эта последовательность имеет предел. Этот предел обозначается буквой e. Ясно, что $e \geqslant 2$ (см. (1)).

Докажем теперь, что

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e. \qquad (2)$$

Для любого $x\neq 0$, $|x|<1$, неравенства $1/(n+1)\leqslant |x|<1/n$ определяют единственное натуральное число $n=n(x)$. Тогда для функций

$$f(x)=\begin{cases}[1+1/(n(x)+1)]^{n(x)} & \text{при } x>0,\\ [1-1/(n(x)+1)]^{-n(x)} & \text{при } x<0\end{cases}$$

и

$$g(x)=\begin{cases}[1+1/n(x)]^{n(x)+1} & \text{при } x>0,\\ [1-1/n(x)]^{-[n(x)+1]} & \text{при } x<0\end{cases}$$

справедливы неравенства

$$f(x)<(1+x)^{1/x}<g(x).$$

А так как $\lim\limits_{x\to 0} n(x)=\infty$, то

$$\lim_{x\to 0} f(x)=e \text{ и } \lim_{x\to 0} g(x)=e,$$

откуда в силу теоремы о промежуточной функции следует (2).

§ 2. Основные элементарные функции

В этом параграфе мы напомним основные элементарные функции и их графики. Основными элементарными функциями называются следующие функции:

x^p (степенная), a^x (показательная), $\log_a x$ (логарифмическая), тригонометрические: $\cos x$, $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ и обратные тригонометрические: $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$.

Прежде чем перейти к графикам этих функций, напомним, что такое система координат на плоскости. Возьмем на плоскости две взаимно перпендикулярные числовые прямые, пересекающиеся в начале отсчета (рис. 92). Тогда каждой точке M на плоскости сопоставляется единственная пара чисел, которая называется координатами этой

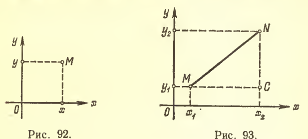


Рис. 92. Рис. 93.

точки M и определяется следующим образом: из точки M опускаются перпендикуляры на оси; основания перпендикуляров — это точки, числа на осях.

Обычно горизонтальную ось называют *осью абсцисс*, или осью Ox, и число — основание перпендикуляра, опущенного на эту ось, — называют *абсциссой* точки M, или координатой икс точки M, и обозначают буквой x — это первая координата. Вертикальную ось называют *осью ординат*, или осью Oy, и число — основание перпендикуляра, опущенного на эту ось, — называют *ординатой* точки M, или координатой игрек точки M, и обозначают ее буквой y — это вторая координата точки M. Точку M с координатами x и y записывают так: $M(x;\ y)$.

При помощи координат ряд задач геометрии можно свести к задачам алгебры. Например, пусть заданы точки $M(x_1;\ y_1)$ и $N(x_2;\ y_2)$. Найти расстояние от M до N (т. е. длину отрезка MN) по координатам точек. Опустим из точек M и N перпендикуляры на оси координат. Из рис. 93 видно, что $MC = x_2 - x_1$, $NC = y_2 - y_1$, и из прямоугольного треугольника MNC по теореме Пифагора получаем

$$MN = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \qquad (1)$$

Приведем теперь графики основных элементарных функций.

Показательная функция $y=a^x$ определена для всех x и положительна. При $a>1$ она монотонно возрастает, при $0<a<1$ — монотонно убывает (рис. 94). Логарифмическая функция $y=\log_a x$ определена при всех $x>0$.

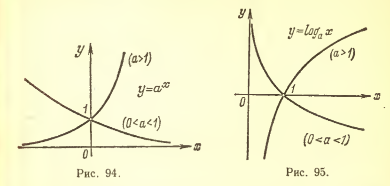


Рис. 94. Рис. 95.

При $a>1$ она монотонно возрастает, при $0<a<1$ — монотонно убывает (рис. 95).

Тригонометрические функции $\sin x$ и $\cos x$ определены для всех x; x — это угол, измеряемый в радианах, $\operatorname{tg} x$ определен для всех $x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$, $\operatorname{ctg} x$ определен для всех $x \neq k\pi$. Все они периодичны. Напомним, что число $T>0$ называется *периодом* функции $y=f(x)$, если

$$f(x)=f(x \pm T)$$

для всех x из области определения функции (рис. 96). Кроме того, $\sin x$, $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ — функции нечетные (рис. 97—99). Напомним, что функция $f(x)$ называется *нечетной* (рис. 100), если для всех x из области ее определения

$$f(-x)=-f(x).$$

График нечетной функции симметричен относительно начала координат. Функция $\cos x$ — четная (рис. 101). Напомним, что функция $f(x)$ называется *четной* (рис. 102), если для всех x из ее области определения

$$f(-x)=f(x).$$

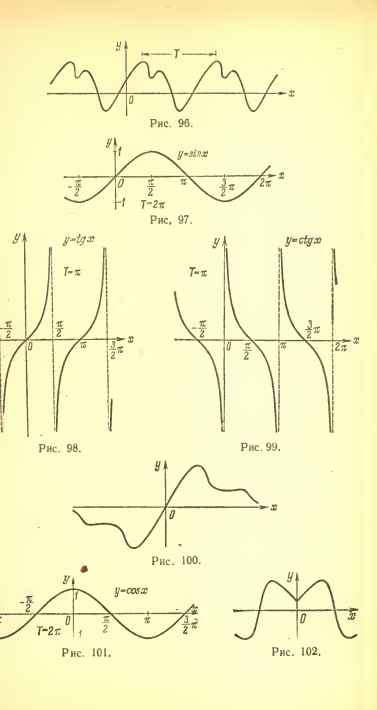


Рис. 96.

Рис. 97.

Рис. 98.

Рис. 99.

Рис. 100.

Рис. 101.

Рис. 102.

График четной функции симметричен относительно оси ординат.

Функция $\operatorname{arctg} x$ (рис. 103) определена для всех x, монотонно возрастающая и нечетная. Функция $\operatorname{arcctg} x$

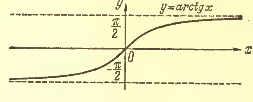


Рис. 103.

(рис. 104) определена для всех x; монотонно убывающая и положительная. Функция $\arcsin x$ (рис. 105) определена только на отрезке $[-1; +1]$, монотонно возрастающая и нечетная. Функция $\arccos x$ (рис. 106) определена на

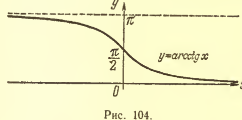


Рис. 104.

отрезке $[-1; 1]$, монотонно убывающая и неотрицательная.

Особо придется поговорить о степенно́й функции x^p. Она определена для всех положительных x. При $p < 0$ она не определена при $x = 0$. При p иррациональном и при p рациональном вида $(2s+1)/2r$ (r — натуральное, s — целое, дробь несократимая) она не определена при $x < 0$. При остальных рациональных p она определена при $x < 0$. Таким образом, при $x < 0$ она определена только для показателей вида $p = s/(2r-1)$ (r — натуральное, s — целое, а дробь несократимая). Если степенна́я функция определена и для положительных x, и для отрицательных, то эта функция или четная, или нечетная.

Действительно, если $p=2q/(2r-1)$, то

$$(-x)^p=\sqrt[2r-1]{(-x)^{2q}}=\sqrt[2r-1]{x^{2q}}=x^p,$$

т. е. x^p — четная функция. Если $p=(2q-1)/(2r-1)$, то

$$(-x)^p=\sqrt[2r-1]{(-x)^{2q-1}}=\sqrt[2r-1]{-x^{2q-1}}=$$
$$=-\sqrt[2r-1]{x^{2q-1}}=-x^p,$$

т. е. x^p — нечетная функция. Поэтому достаточно построить график степенной функции при $x>0$, а затем

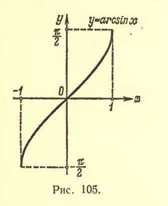


Рис. 105.

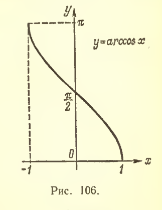
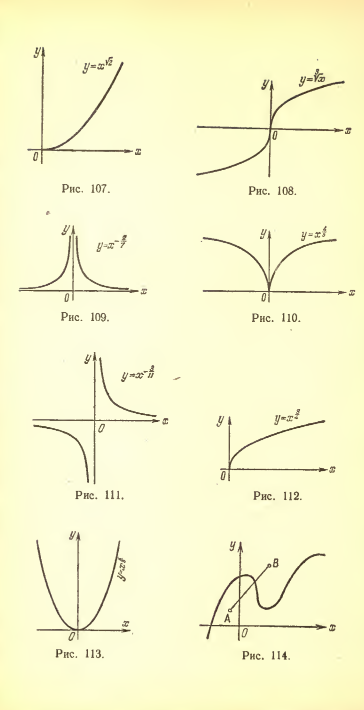


Рис. 106.

продолжить ее четным или нечетным способом для $x<0$ (если она там определена).

При этом надо иметь в виду следующие особенности графика степенной функции для $x>0$. При $x=1$ все функции равны 1. Все степенные функции монотонны, возрастающие при $p>0$ и убывающие при $p<0$. Графики выпуклы вверх при $0<p<1$ и вниз при $p<0$ и $p>1$. При $p>1$ график касается оси Ox в начале координат, а при $0<p<1$ касается оси Oy. Все эти правила легко получаются из результатов гл. II. На рис. 107—113 приведены графики типичных случаев.

Отметим попутно один полезный прием построения графиков при помощи преобразований сжатия и переноса. При переносе графика каждый отрезок, показанный на чертеже, переходит в параллельный и равный себе отрезок (сравните это с поступательным движением в физике)



y
$y=x^{\sqrt{2}}$
0
x
Рис. 107.
y
$y=\sqrt[3]{x}$
0
x
Рис. 108.
y
$y=x^{-\frac{2}{7}}$
0
x
Рис. 109.
y
$y=x^{\frac{4}{5}}$
0
x
Рис. 110.
y
$y=x^{-\frac{3}{11}}$
0
x
Рис. 111.
y
$y=x^{\frac{3}{4}}$
0
x
Рис. 112.
y
$y=x^{\frac{4}{3}}$
0
x
Рис. 113.
y
B
A
0
x
Рис. 114.

(рис. 114, 115). Если перенести чертеж параллельно оси Ox на расстояние a вправо и параллельно оси Oy на расстояние b вверх, то точка с координатами $(x; y)$ перенесется в точку с координатами $(x+a;\ y+b)$, как это видно из

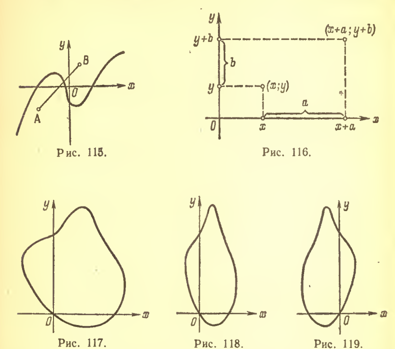


Рис. 115. Рис. 116.

Рис. 117. Рис. 118. Рис. 119.

рис. 116. Эта связь между координатами точек при переносе сохраняется при любых a и b. Например, при переносе точки $(x; y)$ параллельно оси Ox на расстояние l влево и параллельно оси Oy на расстояние s вниз получим точку $(x-l;\ y-s)$, т. е. точку $(x+a;\ y+b)$, где $a=-l$, $b=-s$, и т. п. Сжатие в k раз к оси Oy состоит в том, что точка $(x; y)$ переходит в точку $(x/k;\ y)$. Например, сжатие в 2 раза к оси Oy состоит в том, что расстояния всех точек от оси Oy уменьшаются в 2 раза, а их расстояния от оси Ox не изменяются; при этом сжатии из рис. 117 получается рис. 118. Сжатие в (-2) раза означает, что кроме сжатия в два раза к оси Oy надо

еще сделать симметричное отражение относительно этой оси: при сжатии в (—2) раза из рис. 117 получается рис. 119. Сжатие к оси Oy в 2/5 раза означает, что расстояния всех точек от этой оси увеличивается в 5/2 раза

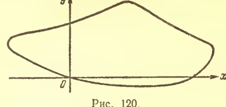


Рис. 120.

(так что на самом деле это не сжатие к оси Oy, а растяжение от оси Oy, но для единообразия терминологии в этом случае принято тоже говорить о сжатии с коэффициентом, меньшим единицы); при сжатии в 2/5 раза из рис. 117 получается рис. 120. Аналогично определяется сжатие к оси Ox — это преобразование, при котором точка с координатами $(x;\ y)$ переходит в точку $(x;\ y/k)$. Геометрический смысл этого преобразования аналогичен геометрическому смыслу сжатия к оси Oy.

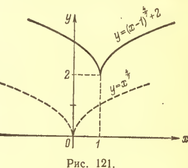


Рис. 121.

При помощи переносов и сжатий из графиков основных элементарных функций можно получить графики более сложных функций. Например, график функции $y = (x-1)^{4/7}+2$ получается из графика функции $y=x^{4/7}$ при переносе с $a=1$ и $b=2$ (рис. 121). Это правило легко доказать в общем виде: график функции $y = f(x-x_0)+y_0$ (линия L_1) получается из графика функции $y=f(x)$ (линия L_2) при переносе с $a=x_0$ и $b=y_0$. Действительно, график функции $y=f(x)$ по определению есть линия

$$L_2 = \{ (x;\ f(x)) \}$$

(в скобках сокращенно записано определение графика — множество всех точек $(x;\ f(x))$ на плоскости). Сделаем перенос линии L_2 с $a=x_0$ и $b=y_0$, получим линию

$$L_3=\{(x+x_0;\ f(x)+y_0)\}$$

(по определению переноса). Обозначив абсциссы точек

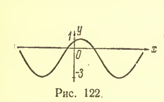


Рис. 122.

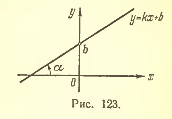


Рис. 123.

обычным образом буквой x, получаем (так как $x=x+x_0-x_0$)

$$L_3=\{(x;\ f(x-x_0)+y_0)\}=L_1$$

по определению графика функции $y=f(x-x_0)+y_0$.

Рассмотрим более общий случай. Пусть известен график функции

$$y=f(x)$$

(линия L_1). Покажем, что для построения графика функции

$$y=Af(px+x_0)+B$$

(линия L_2) достаточно с линией L_1 — графиком функции $y=f(x)$ — проделать следующие преобразования (в указанном порядке):

(1) сжатие к оси Ox в $1/A$ раза;
(2) перенос с $a=-x_0$ и $b=B$;
(3) сжатие к оси Oy в p раз.

Действительно (в скобках под стрелками указано, какое преобразование делается),

$$L_1=\{(x;\ f(x))\}\underset{(1)}{\Rightarrow}\{(x;\ Af(x))\}\underset{(2)}{\Rightarrow}$$
$$\underset{(2)}{\Rightarrow}\{(x-x_0;\ Af(x)+B)\}\underset{(3)}{\Rightarrow}\{((x-x_0)/p;\ Af(x)+B)\}=L_3.$$

Таким образом, после преобразований (1) — (3) из линии L_1 получается линия L_3. Обозначим, как обычно, абсциссы

точек этой линии буквой x, тогда получим (так как $x=p\,[(x-x_0)/p]+x_0$)

$$L_3=\{(x;\ Af(px+x_0)+B)\}=L_2$$

по определению графика функции $y=Af(px+x_0)+B$.

Например, чтобы построить график функции

$$y=2\sin((3x/4)-(\pi/3))-1,$$

надо взять известный график функции $y=\sin x$ (рис. 97), сжать его к оси Ox в $1/2$ раза, перенести с $a=\pi/3$ и

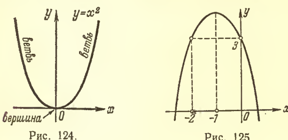


Рис. 124. Рис. 125.

$b=-1$, т. е. вправо на $\pi/3$ и вниз на 1, и сжать в $3/4$ раза к оси Oy. В результате получается рис. 122.

Из преобразованных графиков степенно́й функции обычно отмечают линейную функцию

$$y=kx+b,$$

график которой — прямая, отсекающая на оси Oy отрезок b и с угловым коэффициентом $k=\operatorname{tg}\alpha$, где α — угол между прямой и осью абсцисс (рис. 123). График квадратного трехчлена

$$y=ax^2+bx+c,\quad a\neq 0,$$

называется параболой и также получается при преобразовании графика степенно́й функции, именно, $y=x^2$ (рис. 124):

$$y=a(x+b/2a)^2+c-b^2/4a.$$

Строить параболу удобнее, не выделяя полного квадрата, как это сделано выше, а по двум (или, если нужно точнее, трем) точкам. Например, если нужно построить график

функции

$$y=3-2x-x^2,$$

то можно найти точки пересечения этого графика с прямой $y=3$ (т. е. $y=c$ — свободному члену):

$$3=3-2x-x^2, \quad 0=-x(2+x), \quad x_1=0, \quad x_2=-2.$$

Так как эти точки лежат на горизонтальной прямой, то ось симметрии параболы (искомого графика) проходит посередине между этими точками. Поскольку $a=-1<0$,

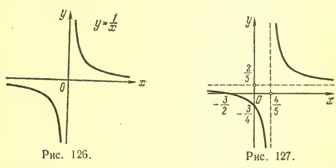


Рис. 126. Рис. 127.

то ветви параболы направлены вниз. Этих рассуждений для первого приближения достаточно. Если надо построить график точнее (рис. 125), то по $x=-1$ на оси симметрии параболы вычисляется еще ордината вершины (это — третья точка).

И последнее — график дробно-линейной функции

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}, \quad c\neq 0, \; bc-ad\neq 0,$$

который называется гиперболой и получается при преобразовании графика степенно́й функции $y=x^{-1}$, как это видно из следующего:

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{\frac{a}{c}(cx+d)+b-\frac{ad}{c}}{cx+d}=\frac{a}{c}+\frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{x+\frac{d}{c}}. \qquad (2)$$

Для построения графика дробно-линейной функции удобно пользоваться следующими соображениями. График функции $y=x^{-1}$ (рис. 126) неограниченно приближается к осям

координат; эти прямые (оси координат) называются *асимптотами гиперболы*. Легко видеть, что вертикальная асимптота есть прямая $x=x_0$, где x_0 — точка, где обращается в нуль знаменатель. Горизонтальная же асимптота $y=y_0$, где $y_0=\lim\limits_{x\to\infty} y$, как это видно из формулы (2). Например, построим график функции

$$y=\frac{2x+3}{5x-4}.$$

Это — гипербола. Найдем ее асимптоты. Так как $5x-4=0$ при $x=4/5$, то вертикальной асимптотой будет прямая $x=4/5$. Так как

$$\lim_{x\to\infty} y=\lim_{x\to\infty}\frac{2+3/x}{5-4/x}=\frac{2}{5},$$

то горизонтальной асимптотой будет прямая $y=2/5$. Так как гипербола не пересекается с асимптотами, то достаточно найти точки пересечения ее с осями координат (например). Пересечение с осью Oy получается при $x=0$, откуда $y=-3/4$. Пересечение с осью Ox получается при $y=0$, откуда $2x+3=0$ и $x=-3/2$. Этого достаточно для построения графика в первом приближении (рис. 127).

Рис. 128.

Кроме основных элементарных функций, большую роль играет функция модуль (рис. 128):

$$|x|=\begin{cases} x \text{ при } x\geqslant 0,\\ -x \text{ при } x<0.\end{cases}$$

Ее основные свойства известны из школьного курса:

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|,$$
$$|a+b|\geqslant|a|-|b| \quad\text{и}\quad |a+b|\geqslant|b|-|a|,$$
$$|a\cdot b|=|a|\cdot|b| \quad\text{и}\quad |a/b|=|a|/|b|.$$

Важно отметить, кроме того, эквивалентность следующих неравенств:

$$|x-a|<h \quad\text{и}\quad a-h<x<a+h$$

и, в частности,

$$|x|<h \quad\text{и}\quad -h<x<h.$$

§ 3. Функции, непрерывные на отрезке

В этом параграфе мы докажем ряд свойств, которыми обладают функции, непрерывные на отрезке.

Определение. Функция $f(x)$ называется *непрерывной* на отрезке $[a; b]$, если она непрерывна в каждой

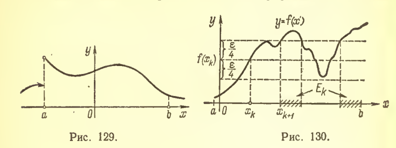


Рис. 129. Рис. 130.

внутренней точке этого отрезка, непрерывна справа в точке a и непрерывна слева в точке b $(\lim\limits_{x\to a+} f(x)=f(a)$ и $\lim\limits_{x\to b-} f(x)=f(b))$.

Так, функция, график которой изображен на рис. 129, непрерывна на отрезке $[a; b]$, хотя, если эту функцию рассматривать на всей прямой, она разрывна: a — ее точка разрыва.

Теорема 3 (Кантора). *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то для любого $\varepsilon>0$ можно указать такое $\delta>0$, что $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$ для любых x' и x'' из $[a; b]$ таких, что $|x'-x''|<\delta$.*

Возьмем число $\varepsilon>0$. Построим на отрезке $[a; b]$ точки $x_0=a<x_1<x_2<\ldots$ следующим образом: если точка $x_k<b$ уже построена, то рассмотрим множество E_k, состоящее из всех точек x, удовлетворяющих неравенствам

$$x_k<x\leqslant b, \quad |f(x)-f(x_k)|>\varepsilon/4. \qquad (1)$$

Положим (рис. 130)

$$x_{k+1}=\begin{cases} b, & \text{если } E_k \text{ пусто (и на этом построение заканчивается)},\\ \inf E_k, & \text{если } E_k \text{ не пусто}. \end{cases} \qquad (2)$$

Заметим, что $x_k < x_{k+1}$ в силу непрерывности $f(x)$ и

$$|f(x)-f(x_k)| \leqslant \varepsilon/4 \text{ для любого } x \text{ из отрезка } [x_k;\ x_{k+1}]. \quad (3)$$

Последовательность $\{x_k\}$ может быть конечной или бесконечной. Предположим, что она бесконечна. Тогда $x_k < b$ для всех k и $c = \sup\{x_k\} \leqslant b$. Так как $a < c \leqslant b$, то функция $f(x)$ непрерывна в точке c слева, и потому можно указать такое число $\delta > 0$, что $a < c - \delta$ и

$$|f(x)-f(c)| < \varepsilon/10 \text{ для любого } x \text{ из интервала } (c-\delta;\ c). \quad (4)$$

По определению числа c можно найти x_k, лежащее в интервале $(c-\delta, c)$. Так как $x_k < x_{k+1} < c$, то x_{k+1} принадлежит интервалу $(c-\delta;\ c)$ и потому

$$|f(x_{k+1})-f(x_k)| \leqslant |f(x_{k+1})-f(c)| + |f(x_k)-f(c)| < 2\cdot\varepsilon/10 = \varepsilon/5 < \varepsilon/4,$$

что противоречит (1) и (2).

Таким образом, последовательность $\{x_k\}$ не может быть бесконечной, и потому существует такой номер n, что $x_n = b$. Положим

$$\delta = \min(x_{k+1} - x_k). \quad (5)$$

Возьмем два любых числа x' и x'' из отрезка $[a;\ b]$ таких, что $0 < x'' - x' < \delta$. Тогда возможны два случая: или обе эти точки попали на некоторый отрезок $[x_k;\ x_{k+1}]$, и тогда в силу (3)

$$|f(x')-f(x'')| \leqslant |f(x')-f(x_k)| + |f(x'')-f(x_k)| \leqslant 2\cdot\varepsilon/4 = \varepsilon/2 < \varepsilon,$$

или этого не случилось, и тогда найдется точка x_k между x' и x''. Но в этом случае

$$x_{k-1} = x_k - (x_k - x_{k-1}) < x_k - (x'' - x') = x' - (x'' - x_k) < x',$$

и, аналогично, $x'' < x_{k+1}$, а потому в силу (3)

$$|f(x')-f(x'')| \leqslant |f(x')-f(x_{k-1})| + |f(x_{k-1})-f(x_k)| + |f(x'')-f(x_k)| \leqslant 3\cdot\varepsilon/4 < \varepsilon.$$

Так как все приведенные рассуждения справедливы для любого $\varepsilon > 0$, то теорема доказана.

Смысл этой теоремы состоит в том, что по заданному числу ε можно не только для каждой точки x_0 подобрать свое δ, как это требуется в определении 6, но найти δ,

общее для всех точек отрезка. Для функций, непрерывных на интервале, это можно сделать уже не всегда. Например, функция $f(x)=1/x$ непрерывна на интервале $(0;\ 1)$. Однако для $\varepsilon=1$, какое бы $\delta>0$ мы ни брали, всегда можно указать точки $x'=\min(\delta;\ 1/2)$ и $x''=\frac{1}{2}x'$ из интервала $(0;\ 1)$, для которых $|x'-x''|=\frac{1}{2}x'<\delta$, а

$$|f(x')-f(x'')|=\left|\frac{1}{x'}-\frac{1}{x''}\right|=\left|\frac{x''-x'}{x'\cdot x''}\right|=$$

$$=\frac{\frac{1}{2}x'}{x'\cdot\frac{1}{2}x'}=\frac{1}{x'}\geqslant 2>1=\varepsilon.$$

Теорема 4. *Функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[a;\ b]$, имеет на этом отрезке наибольшее и наименьшее значения.*

В силу теоремы 3 для числа 1 можно подобрать такое натуральное число n, что

$$|f(x')-f(x'')|<1 \text{ для любых } x' \text{ и } x'' \text{ из } [a;\ b]$$

таких, что $|x'-x''|<2(b-a)/n$.

Положим $x_k=a+k(b-a)/n$. Для любого числа x из $[a;\ b]$ найдется отрезок $[x_k;\ x_{k+1}]$, содержащий точку x. Тогда

$$|f(x)|\leqslant|f(a)|+|f(x_1)-f(a)|+\ldots+|f(x)-f(x_k)|<$$
$$<|f(a)|+k+1\leqslant|f(a)|+n.$$

Отсюда следует, что множество E всех значений функции $f(x)$ есть ограниченное числовое множество, и потому существуют $\sup E=M$ и $\inf E=m$, так что для всех x из отрезка $[a;\ b]$ будет

$$m\leqslant f(x)\leqslant M.$$

Покажем, что в отрезке $[a;\ b]$ найдутся такие точки $\tilde{x}$ и $\underset{\sim}{x}$, что

$$f(\tilde{x})=M \quad \text{и} \quad f(\underset{\sim}{x})=m.$$

Предположим противное, что такой точки $\tilde{x}$ нет, т. е. $f(x)<M$ для всех x из отрезка $[a;\ b]$. Но тогда функция

$$\varphi(x)=1/(M-f(x))$$

неотрицательна (что очевидно) и непрерывна, так как знаменатель есть непрерывная функция, не обращающаяся в нуль. Но тогда в силу первой части доказательства эта функция ограничена на отрезке $[a; b]$, т. е. существует такое число C, что для всех x на отрезке $[a; b]$ будет

$$0 < \varphi(x) \leqslant C,$$

откуда

$$1/\varphi(x) \geqslant C^{-1}, \quad \text{или} \quad f(x) \leqslant M - 1/C,$$

что противоречит тому, что $M = \sup E$. Это противоречие получилось из-за предположения, что точки $\tilde{x}$ на отрезке нет. Следовательно, это предположение было неверно, и на отрезке $[a; b]$ есть точка $\tilde{x}$ такая, что $f(\tilde{x}) = M$. Аналогично доказывается существование точки $\underline{x}$.

Теорема 5. *Функция непрерывная на отрезке и имеющая разные знаки на его концах, обращается в нуль внутри этого отрезка.*

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и $f(a) > 0$, $f(b) < 0$. Пусть E — множество тех точек x из отрезка $[a; b]$, для которых $f(t) \geqslant 0$ для любых t, удовлетворяющих неравенствам $a \leqslant t \leqslant x$. Так как это множество ограничено (оно лежит на отрезке $[a; b]$), то существует

$$\sup E = c. \tag{6}$$

Ясно, что $a \leqslant c \leqslant b$. Если $f(c) > 0$, то $c \neq b$ (так как $f(b) < 0$) и потому $c < b$ и $f(x)$ непрерывна в точке c справа. Это значит, что можно найти такое число $\delta > 0$, что $\delta + c < b$ и в то же время для всех x, удовлетворяющих неравенствам $c < x < c + \delta$, будет $|f(c) - f(x)| < f(c)$. Из последнего неравенства следует, что $f(x) > 0$ для всех x из интервала $(c; c + \delta)$, что противоречит определению (6) числа c. Следовательно, $f(c) \leqslant 0$. Если $f(c) < 0$, то $c \neq a$ (так как $f(a) > 0$), и потому $c > a$ и $f(x)$ непрерывна в точке c слева. В силу этого можно указать такое $\delta > 0$, $c - \delta > a$, что $f(x) < 0$ для всех x из интервала $(c - \delta; c)$ (доказывается аналогично предыдущему случаю), что противоречит определению (6) числа c. Следовательно, не может быть $f(c) < 0$, и потому $f(c) = 0$. А так как $f(a) \neq 0$ и $f(b) \neq 0$, то $c \neq a$ и $c \neq b$, т. е. точка c находится внутри отрезка: $a < c < b$.

Теорема 6. *Функция, непрерывная на отрезке, принимает все промежуточные значения между своим наибольшим и наименьшим значениями.*

Пусть $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\ b]$. По теореме 4 на отрезке $[a;\ b]$ существуют точки $\tilde{x}$ и $\underset{\sim}{x}$ такие, что

$$f(\tilde{x}) \geqslant f(x) \geqslant f(\underset{\sim}{x}) \text{ для всех } x \text{ из } [a;\ b]. \qquad (7)$$

Пусть C — любое число, удовлетворяющее неравенству

$$f(\tilde{x}) > C > f(\underset{\sim}{x}). \qquad (8)$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = f(x) - C.$$

Она непрерывна на отрезке $[\tilde{x};\ \underset{\sim}{x}]$ (пусть для определенности $\tilde{x} < \underset{\sim}{x}$), так как этот отрезок есть часть отрезка $[a;\ b]$ и

$$\varphi(\tilde{x}) = f(\tilde{x}) - C > 0,\ \ \varphi(\underset{\sim}{x}) = f(\underset{\sim}{x}) - C < 0,$$

т. е. на концах отрезка $[\tilde{x};\ \underset{\sim}{x}]$ $\varphi(x)$ имеет разные знаки. По теореме 5 существует точка c, $\tilde{x} < c < \underset{\sim}{x}$, такая, что

$$\varphi(c) = 0, \text{ или } f(c) - C = 0,$$

откуда следует

$$f(c) = C,\ \ a < c < b.$$

Теорема 7 (формула Лагранжа). *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\ b]$ и имеет производную (конечную) $f'(x)$ для любого x из интервала $(a;\ b)$, то внутри отрезка $[a;\ b]$ можно найти такую точку c, $a < c < b$, что*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Она непрерывна на отрезке $[a;\ b]$, и ее значения на концах этого отрезка равны

$$\varphi(a) = f(a) \text{ и } \varphi(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = f(a). \qquad (9)$$

По теореме 4 на отрезке есть точка $\tilde{x}$ и точка $\underset{\sim}{x}$ такие,

что

$$\varphi(\underset{\sim}{x}) \leqslant \varphi(x) \leqslant \varphi(\tilde{x}) \text{ для всех } x \text{ из } [a;\ b]. \qquad (10)$$

Если одна из этих точек находится внутри отрезка — назовем ее c, $a < c < b$, — то по необходимому признаку экстремума $\varphi'(c) = 0$. Если обе точки не внутренние (совпадают с концами), то $\varphi(\tilde{x}) = \varphi(\underset{\sim}{x})$ в силу (9), и функция $\varphi(x)$ есть постоянная в силу (10). Тогда $\varphi'(c) = 0$ в любой точке c из интервала $(a; b)$. Таким образом, существует точка $c, a < c < b$, такая, что

$$\varphi'(c) = 0. \qquad (11)$$

Поскольку

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

то равенство (11) принимает вид

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

откуда

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a),$$

что и требовалось доказать.

Для доказательства следующей теоремы введем сокращенную запись для обозначения сумм:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_k a_k = \sum a_k.$$

В этих обозначениях интегральные суммы будут записываться так:

$$\sum f(c_k)\, \Delta x_k = \sigma,$$

где $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_n = b$, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ и $x_{k-1} \leqslant c_k \leqslant x_k$. Группировка слагаемых в скобки

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = (a_1 + a_2 + \ldots a_{k_1}) + (a_{k_1+1} + \ldots + a_{k_2}) + \ldots$$
$$\ldots + (a_{k_s+1} + \ldots + a_{k_{s+1}}) + \ldots + (a_{k_r+1} + \ldots + a_{k_{r+1}})$$

(так что $k_{r+1}=n$) в этих обозначениях будет выглядеть так (считая, что $k_0=0$):

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{j=0}^{r}\left(\sum_{k=k_j+1}^{k_{j+1}} a_k\right).$$

Теорема 8. *Функция, непрерывная на отрезке, интегрируема на этом отрезке.*

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\ b]$. Рассмотрим следующую последовательность $\{I_n\}$ интегральных сумм. Для построения n-й интегральной суммы берем точки деления

$$x_k^{(n)} = a + k(b-a)/2^n \qquad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ 2^n),$$

в качестве точек $c_k^{(n)}$ выбираем точки наибольшего значения функции $f(x)$ на отрезке $[x_k^{(n)};\ x_{k+1}^{(n)}]$. Последовательность $\{I_n\}$ монотонна и ограничена. Действительно, так как $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\ b]$, то она ограничена на этом отрезке, т. е.

$$|f(x)| \leqslant A \text{ для всех } x \text{ на отрезке } [a;\ b], \qquad (12)$$

откуда следует, что для любого n

$$|I_n| = \left|\sum_{k=0}^{2^n-1} f(c_k^{(n)})\Delta \tilde{x}_k^{(n)}\right| \leqslant \sum |f(c_k^{(n)})|\,\Delta x_k^{(n)} \leqslant A(b-a).$$

Ограниченность последовательности $\{I_n\}$ доказана.

Докажем монотонное убывание. Так как $f(c_k^{(n)})$—наибольшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[x_k^{(n)};\ x_{k+1}^{(n)}]$—не меньше, чем $f(c_{2k+1}^{(n+1)})$ и $f(c_{2k+2}^{(n+1)})$—наибольшие значения этой же функции на частях этого отрезка—отрезках $[x_{2k}^{(n+1)};\ x_{2k+1}^{(n+1)}]$ и $[x_{2k+1}^{(n+1)};\ x_{2k+2}^{(n+1)}]$ (рис. 131) и в то же время $\Delta x_k^{(n+1)} = \frac{1}{2}\Delta x_k^{(n)} = (b-a)\,2^{-(n+1)}$ при любых m и k, то

$$I_n - I_{n+1} = \sum_{k=0}^{2^n-1} f(c_k^{(n)})\,\Delta x_k^{(n)} - \sum_{j=0}^{2^{n+1}-1} f(c_j^{(n+1)})\,\Delta x_j^{(n+1)} =$$

$$= \frac{b-a}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{2^n-1} \left[2f(c_k^{(n)}) - f(c_{2k+1}^{(n+1)}) - f(c_{2k+2}^{(n+1)})\right] \geqslant 0,$$

т. е. $I_n \geqslant I_{n+1}$—последовательность монотонно убывает.

В силу теоремы 2 эта последовательность имеет предел

$$I = \lim I_n. \tag{13}$$

Покажем, что предел интегральных сумм σ для функции $f(x)$

Рис. 131.

Рис. 132.

по отрезку $[a;\ b]$ тоже равен I. Это означает следующее: для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, зависящее от ε, что для всех интегральных сумм σ с $\lambda < \delta$ будет

$$|I - \sigma| < \varepsilon.$$

Возьмем $\varepsilon > 0$. По теореме 3 существует δ_1 такое, что

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon/4(b-a) \text{ для любых } x' \text{ и } x'' \text{ из } [a;\ b] \text{ таких, что } |x' - x''| < \delta_1. \tag{14}$$

Выберем n таким, что $(b-a)2^{-n} < \delta_1$ и $|I - I_n| < \varepsilon/2$ (что можно сделать в силу равенства (13)). Положим

$$\delta = \min(\delta_1;\ \varepsilon/(A \cdot 2^{n+4})), \tag{15}$$

где A определено неравенством (12). Возьмем любую интег-

Рис. 133.

ральную сумму σ с $\lambda = \max \Delta x_j < \delta$. Для нее

$$\sigma - I_n = \sum_{j=1}^{m} f(c_j)\,\Delta x_j - \sum_{k=0}^{2^n-1} f(c_k^{(n)})\,\Delta x_k^{(n)} =$$
$$= \sum{}' f(c_j)\,\Delta x_j + \sum{}'' f(c_j)\,\Delta x_j - \sum_k f(c_k^{(n)})h_k - \sum_k f(c_k^{(n)})\,\Delta_k,$$

где в $\sum''$ входят только те слагаемые, для которых $(x_j;\ x_{j+1})$

содержит хоть одну точку из $x_k^{(n)}$, а в $\sum'$ — все остальные; $h_k = \sum_j \Delta x_j$, где сумма берется по всем индексам j, для которых отрезок $[x_j;\ x_{j+1}]$ лежит на отрезке $[x_k^{(n)};\ x_{k+1}^{(n)}]$; если таких j нет, то $h_k = 0$ (см. рис. 132), а $\Delta_k = \Delta x_k^{(n)} - h_k$ (ясно, что $0 < \Delta_k < 2\lambda$). Тогда в силу (14) и (15)

$$|\sigma - I_n| \leqslant \left|\sum_j{}' f(c_j)\,\Delta x_j - \sum_k f(c_k^{(n)})\,h_k\right| + \left|\sum{}''\right| + \\ + \left|\sum_k f(c_k^{(n)})\,\Delta_k\right| \leqslant \left|\sum_k \left(\sum_{(j,\,k)} [f(c_j) - f(c_k^{(n)})]\,\Delta x_j\right)\right| + \\ + 2^n\lambda A + 2^n A\cdot 2\lambda < \sum_j \frac{\varepsilon}{4(b-a)}\,\Delta x_j + 3\cdot 2^n A\lambda \leqslant \\ \leqslant \frac{\varepsilon}{4} + 3\cdot 2^n A\,\frac{\varepsilon}{2^{n+4}A} < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad (16)$$

где $\sum\limits_{(j,\,k)}$ обозначает сумму таких слагаемых, у которых индексы j таковы, что отрезок $[x_j;\ x_{j+1}]$ целиком лежит на отрезке $[x_k^{(n)};\ x_{k+1}^{(n)}]$ (на рис. 133 слагаемые с индексом $j = p - 1$ и $j = s$ не входят в сумму $\sum\limits_{(j,\,k)}$, а слагаемые с индексами $j = p,\ p+1,\ \ldots,\ s-1$ входят). Из оценки (16) в силу выбора n получаем

$$|I - \sigma| \leqslant |I - I_n| + |\sigma - I_n| < 2\cdot\varepsilon/2 = \varepsilon,$$

что и доказывает согласно определению, что

$$\lim_{\lambda\to 0} \sigma = I.$$

ОГЛАВЛЕНИЕ

Олег Сергеевич Ивашев-Мусатов
НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА
М., 1973, 160 стр. с илл.

Редактор *Г. В. Дорофеев*

Техн. редактор *Е. Н. Земская*
Корректор *Т. А. Панькова*

Сдано в набор 24/XI 1972 г. Подписано к печати 29/I 1973 г. Бумага $84 \times 108/_{32}$. Физ. печ. л. 5. Условн. печ. л. 8,4. Уч.-изд. л. 7,5. Тираж 85 000 экз. Т-00738. Цена книги 21 коп. Заказ 3402.

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени
Первая Образцовая типография имени
А. А. Жданова
Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета Министров
СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной
торговли.
Москва, М-54, Валовая, 28

Цена 21 коп.